Généralités sur les fonctions

I Vocabulaire des fonctions

1. Notion de fonction

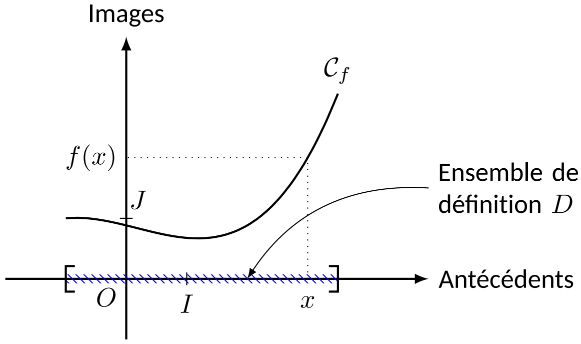
Une fonction est un objet mathématique qui reçoit un nombre en entrée et qui donne un autre nombre en sortie.

Définition I.1

Soit D un ensemble de nombres (par exemple, un intervalle). La fonction f qui, à un nombre x, associe le nombre $f(x)$ se note :

$$\begin{array}{rcccc} f & : & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

- L'ensemble D s'appelle **l'ensemble de définition**.
- Le nombre x s'appelle un **antécédent**.
- Le nombre $f(x)$ s'appelle l'**image** de x.



Définition I.2

Soit f une fonction. La courbe d'équation $y = f(x)$ est l'ensemble des points de coordonnées (x, y) tels que $y = f(x)$. Cette courbe s'appelle la **courbe représentative** de f et se note $\mathcal{C}_f$.

2. Différents modes de définition d'une fonction

Fonction définie par un tableau de valeurs

Exemple I.1 — On considère la fonction h définie par le tableau suivant :

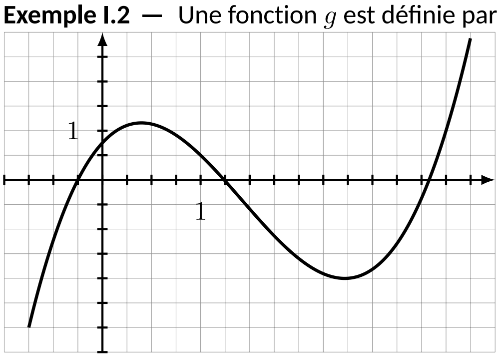
x	-1	0	2	3	7	10	12	20
$h(x)$	-2	5	2	0	-2	1	$-\sqrt{7}$	0

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction h ?
2. (a) Quelle est l'image de -1 par la fonction h ?
   (b) Que vaut $h(7)$?
3. (a) Quels sont les antécédents de 1 par la fonction h ?
   (b) Quels sont les antécédents de -2 par la fonction h ?
   (c) Quels sont les antécédents de 3 par la fonction h ?
4. Donner l'ensemble des solutions de l'équation $h(x) = 0$.

$\longrightarrow$ À rédiger

Fonction définie par un graphique

Exemple I.2 — Une fonction g est définie par le graphe ci-dessous.

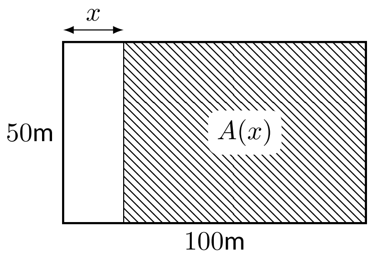


1. L'ensemble de définition de la fonction g est ....
2. L'image de 1 par la fonction g est ....
3. Un antécédent de 1 est ....
4. (a) Donner un nombre qui ne possède pas d'image par la fonction g ....
   (b) Donner un nombre qui ne possède pas d'antécédent par la fonction g ....

$\longrightarrow$ À rédiger

Fonction définie par une formule

Exemple I.3 — Un agriculteur souhaite couper son champ rectangulaire en deux parties. Il cultivera une partie et laissera l'autre partie en jachères.



1. Exprimer l'aire $A(x)$ de la partie hachurée en fonction de x.
2. À quel ensemble le nombre x appartient-il ?
3. Calculer l'image de 30 par la fonction A.
4. Pour quelle(s) valeur(s) de x l'aire hachurée est-elle égale à 4500m^2 ? $\longrightarrow$ À rédiger

Exemple I.4 — On considère le programme de calcul suivant :

Choisir un nombre Le multiplier par 2 Retrancher 6 Prendre l'inverse du nombre obtenu

1. Donner l'expression d'une fonction f qui est décrite par ce programme.
2. Quel est l'ensemble de définition de cette fonction ?
   Qu'est-ce que cela entraîne pour le programme de calcul ? $\longrightarrow$ À rédiger

3. Un cas particulier : les fonctions affines

Définition I.3

Une fonction qui est définie par une formule du type $f(x) = ax + b$ où a et b sont deux nombres réels donnés s'appelle une **fonction affine**.

- Si $b = 0$ alors f s'appelle une **fonction linéaire**, de coefficient de proportionnalité a.
- Si $a = 0$ alors f s'appelle une **fonction constante**.

Définition I.4

Le nombre a s'appelle le **coefficient directeur** (ou la pente). Le nombre b s'appelle **l'ordonnée à l'origine**.

Exemple I.5 — Dans chaque cas, donner le type de la fonction et préciser le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine :
1. $h : x \mapsto 5x - 2.$ 2. $f : x \mapsto 2x.$ 3. $g : x \mapsto 3.$ $\longrightarrow$ À rédiger

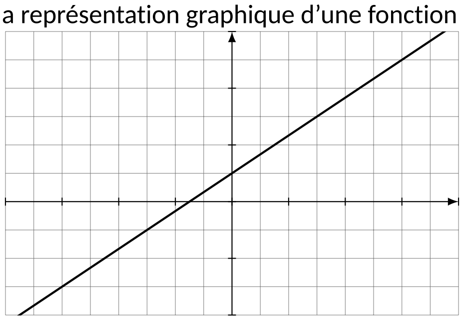
Exemple I.6 — La fonction $g(x) = 4(5 - 2x)$ est-elle affine ? Si oui, quel sont ses coefficient directeur et ordonnée à l'origine ? $\longrightarrow$ À rédiger

Proposition I.5

La représentation graphique d'une fonction affine $f(x) = ax + b$ est une droite qui passe par le point de coordonnées $(0; b)$.

Exemple I.7 — Tracer la représentation graphique de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{3}x + 4$. $\longrightarrow$ À rédiger

Exemple I.8 — On donne ci-dessous la représentation graphique d'une fonction affine f :

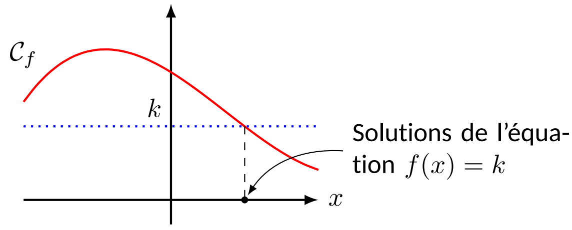


1. Déterminer graphiquement l'ordonnée à l'origine de f.
2. Déterminer par le calcul le coefficient directeur de f. $\longrightarrow$ À rédiger

II Résolution d'équations $f(x) = k$ et $f(x) = g(x)$

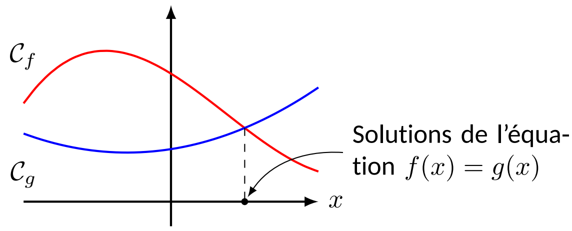
Proposition II.1

Soit f une fonction et k un nombre réel.
Les solutions de l'équation $f(x) = k$ sont les abscisses des points de la courbe de f qui ont pour ordonnée k.

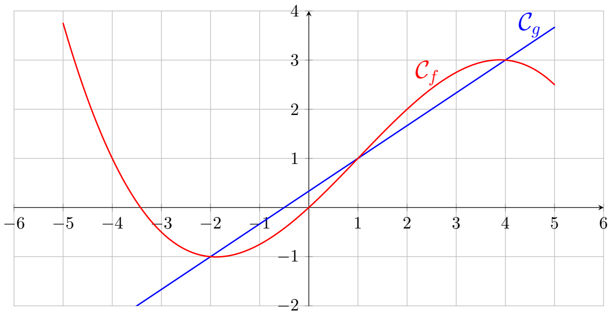


Proposition II.2

Soit f et g deux fonctions.
Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe de f et de la courbe de g.



Exemple II.1 — On considère les fonctions f et g définies sur $[-5; 5]$ par leurs graphes donnés ci-dessous :



Déterminer l'ensemble des solutions des équations suivantes :

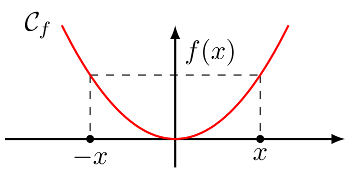
1. $f(x) = 2$
2. $g(x) = -1$
3. $f(x) = g(x)$

$\rightarrow$ À rédiger

III Fonctions paires et impaires

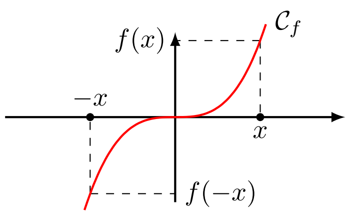
Définition III.1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est une fonction **paire** si l'intervalle I est symétrique par rapport à 0 et si pour tout $x \in D$, $f(-x) = f(x)$.



Définition III.2

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est une fonction **impaire** si l'intervalle I est symétrique par rapport à 0 et si pour tout $x \in D$, $f(-x) = -f(x)$.



Proposition III.3

La représentation graphique d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
La représentation graphique d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Exemple III.1 — On considère les trois fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = 4x \qquad g(x) = x^2 - 3 \qquad h(x) = 2x - 5$
Montrer que f est impaire, que g est paire et que h n'est ni paire, ni impaire.

$\rightarrow$ À rédiger

Solutions

Exemple I.1

1. $D_f = \{-1; 0; 2; 3; 7; 10; 12; 20\}$
2. (a) L'image de -1 est -2.
   (b) $h(7) = -2$
3. (a) 10
   (b) -1 et 7
   (c) 3 n'a pas d'antécédent

Exemple I.2

1. $[-0,75; 3,75]$
2. $0,5$
3. $3,5$
4. (a) -1
   (b) $-3,5$

Exemple I.3

1. $A(x) = 50(100 - x) = 5000 - 50x$
2. $[0; 100]$
3. $A(30) = 5000 - 50 \times 30 = 3500$
4. $A(x) = 4500 \iff 5000 - 50x = 4500 \iff x = \frac{500}{50} = 10.$

Exemple I.4

1. $f(x) = \dfrac{1}{2x - 6}$
2. La valeur interdite est $x = 3$ donc l'ensemble de définition est $]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$. Le nombre choisi dans le programme de calcul doit être différent de 3 au risque d'avoir une erreur.

Exemple I.5

1. Fonction affine avec $a = 5$ et $b = -2$
2. Fonction linéaire avec $a = 2$ et $b = 0$
3. Fonction constante avec $a = 0$ et $b = 3$

Exemple I.6

Comme $g(x) = 20 - 8x$ alors g est bien une fonction affine avec $a = -8$ et $b = 20$.

Exemple I.7

Si $x = 0$ alors $f(0) = 4$.
Si $x = 3$ alors $f(3) = 5$.
La représentation graphique est la droite passant par les points $A(0; 4)$ et $B(3; 5)$.

Exemple I.8

1. $b = 0,5$
2. f est de la forme $f(x) = ax + 0,5$. On voit graphiquement que $f(3) = 2,5$ donc $a \times 3 + 0,5 = 2,5$ donc $3a = 2$ d'où $a = 2/3$.

Exemple II.1

1. $S = \{-4,5; 2\}$
2. $S = \{-2\}$
3. $S = \{-2; 1; 4\}$

Exemple III.1

1. $f(-x) = 4 \times (-x) = -4x = -f(x)$
2. $g(-x) = (-x)^2 - 3 = x^2 - 3 = g(x)$
3. $h(1) = -3$ et $h(-1) = -7$. La fonction h ne peut pas être paire car cela voudrait dire que $h(1) = h(-1)$, ni impaire car cela voudrait dire que $h(1) = -h(-1)$.

Généralités sur les fonctions

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir déterminer une image et un antécédent d'une fonction définie par un tableau, un graphique ou une formule.
- Connaître la définition d'une fonction affine et savoir représenter une fonction affine donnée par sa formule $f(x) = ax + b$.
- Savoir résoudre graphiquement des équations du type $f(x) = k$ ou $f(x) = g(x)$.
- Connaître les définitions de fonctions paires et impaires.
- Savoir montrer qu'une fonction est paire, impaire ou ni l'un ni l'autre.

Généralités sur les fonctions

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir déterminer une image et un antécédent d'une fonction définie par un tableau, un graphique ou une formule.
- Connaître la définition d'une fonction affine et savoir représenter une fonction affine donnée par sa formule $f(x) = ax + b$.
- Savoir résoudre graphiquement des équations du type $f(x) = k$ ou $f(x) = g(x)$.
- Connaître les définitions de fonctions paires et impaires.
- Savoir montrer qu'une fonction est paire, impaire ou ni l'un ni l'autre.

Généralités sur les fonctions

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir déterminer une image et un antécédent d'une fonction définie par un tableau, un graphique ou une formule.
- Connaître la définition d'une fonction affine et savoir représenter une fonction affine donnée par sa formule $f(x) = ax + b$.
- Savoir résoudre graphiquement des équations du type $f(x) = k$ ou $f(x) = g(x)$.
- Connaître les définitions de fonctions paires et impaires.
- Savoir montrer qu'une fonction est paire, impaire ou ni l'un ni l'autre.