CHAPITRE 6

Ensemble des nombres réels

I Ensembles de nombres

1. Entiers, décimaux et rationnels

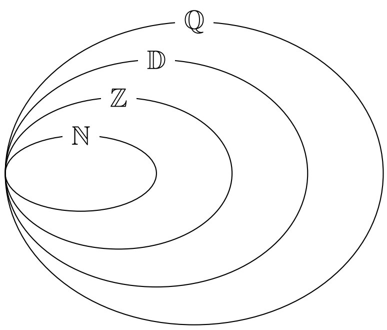
Définition I.1

- Un nombre entier positif ou nul s'appelle un **entier naturel**. L'ensemble des entiers naturels se note $\mathbb{N}$.
  Exemples : 0 ; 1 ; 2 ; ...
- Un nombre entier positif, nul ou négatif s'appelle un **entier relatif**. L'ensemble des entiers relatifs se note $\mathbb{Z}$.
  Exemples : -18 ; -24 ; 3 ; 9 ; ...

Définition I.2

- Un nombre de la forme $\dfrac{a}{10^k}$ où a est un nombre relatif et k est un entier naturel s'appelle un **nombre décimal**.
  Un nombre décimal est donc un nombre qui possède un nombre fini de décimales non nulles après la virgule.
  L'ensemble des nombres décimaux se note $\mathbb{D}$.
  Exemples : $244/100$; $-37/1000$; $3,45$; ...
- Un nombre de la forme $\dfrac{a}{b}$ où a et b sont deux entiers s'appelle une fraction ou un **nombre rationnel**. L'ensemble des nombres rationnels se note $\mathbb{Q}$.
  Exemples : $3/7$; $-28/19$; $-0,5$; $4/10$; 3 ; ...

Exemple I.1 — Placer chacun des nombres suivants dans le diagramme ci-dessous :
$-10 \quad 76/100 \quad 4/7 \quad 0 \quad 2,3 \quad 49/7 \quad 3/4 \quad -5/13 \quad -25/5$



$\rightarrow$ À rédiger

Remarque — Pour dire que ces ensembles sont inclus les uns dans les autres, on écrit : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$

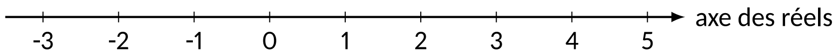
Exemple I.2 — Le nombre $\dfrac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal. Si un nombre est décimal alors il est rationnel mais cet exemple montre que la réciproque est fausse.

Exemple I.3 — Les nombres $\sqrt{2}$ et π ne sont pas des nombres rationnels.

2. L'ensemble des nombres réels

Définition I.3

L'ensemble qui contient tous les nombres que vous connaissez s'appelle l'ensemble des **nombres réels**. On le note $\mathbb{R}$ et on le représente à l'aide d'un axe gradué, qu'on appelle l'axe des réels.



Exemple I.4 — Tracer un axe représentant les nombres réels et y placer approximativement les points A, B, C, D, E et F correspondant respectivement aux nombres suivants : $4 \quad 2,7 \quad -5/3 \quad \sqrt{2} \quad -3 \quad \pi$ $\rightarrow$ À rédiger

II Intervalles de $\mathbb{R}$

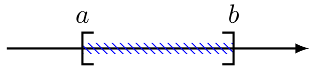
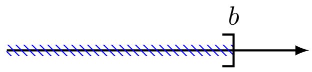
1. Définition d'un intervalle

Définition II.1

Un intervalle de $\mathbb{R}$ est une portion de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire :

- soit un segment ;
- soit une demi-droite ;
- soit la droite des réels tout entière.

2. Les différents types d'intervalles

Type d'intervalle	Ensemble des x tels que...	Représentation graphique
$[a;b]$	$a \leqslant x \leqslant b$	
$[a;b[$		
	$a < x \leqslant b$	
	$a \leqslant x$	
		
$]a;+\infty[$		
$]-\infty;b[$		

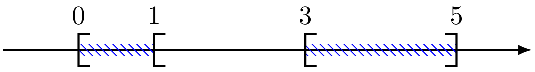
Exemple II.1 — Représenter graphiquement l'intervalle $[1;2[$ sur un axe puis donner les inéquations que vérifie un nombre x qui appartient à cet intervalle. Enfin, justifier $1,9 \in [1;2[$. $\longrightarrow$ À rédiger

3. Réunion d'intervalles

Définition II.2

L'ensemble qui contient les éléments qui sont soit dans l'intervalle I ou dans l'intervalle J se note $I \cup J$. On dit que cet ensemble est la **réunion** des deux intervalles I et J.

Exemple II.2 — On a hachuré ci-dessous la réunion des intervalles $[0;1[$ et $[3;5]$.



Exemple II.3 — Dans chaque cas, hachurer sur un axe la réunion des intervalles :

1. $]-\infty;4[\cup[5;12[$
2. $[-2;6]\cup]4;10]$ $\longrightarrow$ À rédiger

4. Intersection d'intervalles

Définition II.3

L'ensemble qui contient les éléments qui sont soit dans l'intervalle I *et* dans l'intervalle J se note $I \cap J$. On dit que cet ensemble est l'**intersection** des deux intervalles I et J.

Exemple II.4 — Dans chaque cas, hachurer sur un axe l'intersection des intervalles :

1. $[-2;6]$ et $]4;10]$
2. $]-\infty;13[$ et $[5;12[$ $\longrightarrow$ À rédiger

III Valeur absolue

1. Notation

Définition III.1

La **valeur absolue** d'un nombre réel x est la distance de x à 0 sur l'axe des réels. On la note $|x|$.

Exemple III.1 — Déterminer $|4|$ et $|-5,6|$. → À rédiger

Remarque — La valeur absolue de x est égale à x si x est positif et est égale à $-x$ sinon.

Proposition III.2

Si x est un nombre réel alors $\sqrt{x^2} = |x|$.

Exemple III.2 — Déterminer $\sqrt{11^2}$, $\sqrt{(-5)^2}$ et $\sqrt{(-4,3)^4}$. → À rédiger

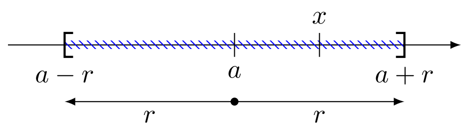
2. Distance entre deux réels

Définition III.3

Soit a et b deux nombres réels. La distance de a à b est le nombre $|b-a|$.

Proposition III.4

Soit x, a et $r > 0$ trois nombres réels.
$x \in [a-r; a+r]$ si, et seulement si, $|x-a| \leqslant r$.



Remarque — L'intervalle $[a-r; a+r]$ peut être vu comme un « disque » de centre a et de rayon r. Ainsi, x appartient à ce disque si la distance de x au centre a est inférieure au rayon r.

Exemple III.3 —

1. Représenter à l'aide d'un intervalle la condition $|x-1| \leqslant 0,2$.
2. Traduire à l'aide d'une valeur absolue la condition $x \in [7,4; 7,6]$. → À rédiger

IV Encadrement d'un réel par un décimal

Définition IV.1

Soit x un nombre réel.
Donner un encadrement de x par deux nombres décimaux, c'est donner deux nombres décimaux a et b tels que $a \leqslant x \leqslant b$. La distance $b-a$ s'appelle l'**amplitude** de l'encadrement.

Exemple IV.1 — Donner un encadrement de π par deux nombres décimaux. → À rédiger

Définition IV.2

On dit qu'un encadrement est à 10^{-n} près si son amplitude est égale à 10^{-n}.

Exemple IV.2 —

1. Donner un encadrement de π à 10^{-3} près.
2. Donner un encadrement de $\sqrt{2}$ à 10^{-6} près. → À rédiger

Solutions

Exemple I.1

$-10 \in \mathbb{Z}$

$76/100 \in \mathbb{D}$

$4/7 \in \mathbb{Q}$

$0 \in \mathbb{N}$

$2,3 \in \mathbb{D}$

$49/7 \in \mathbb{N}$

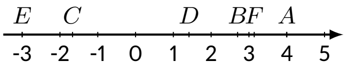
$3/4 \in \mathbb{D}$

$-5/13 \in \mathbb{Q}$

$-25/5 \in \mathbb{Z}$

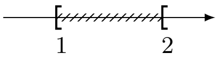
Exemple I.4

On place les points de la manière suivante :



Exemple II.1

On a la représentation suivante :

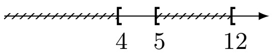


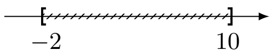
Un nombre x appartient à $[1;2[$ si, et seulement si, $1 \leqslant x < 2$.

Le nombre $1,9$ appartient à $[1;2;[$ car $1 \leqslant 1,9 < 2$.

Exemple II.3

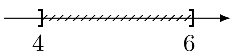
On hachure les parties suivantes :

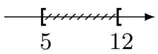
1. 

2. 

Exemple II.4

On hachure les parties suivantes :

1. 

2. 

Exemple III.1

$|4| = 4$ et $|-5,6| = 5,6$.

Exemple III.2

$\sqrt{11^2} = 11$

$\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$

$\sqrt{(-4,3)^4} = \sqrt{((-4,3)^2)^2} = |(-4,3)^2| = 4,3^2 = 73,96$

Exemple III.3

1. $[1-0,2; 1+0,2] = [0,8; 1,2]$
2. $|x-7,5| \leqslant 0,1$

Exemple IV.1

$2 < \pi < 3$

Exemple IV.2

1. $3,141 < \pi < 3,142$
2. $1,414213 < \sqrt{2} < 1,414214$

Ensemble des nombres réels

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Connaître les notations $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$.
- Savoir associer à chaque point de la droite graduée un unique nombre réel et réciproquement.
- Savoir ce qu'est un intervalle de $\mathbb{R}$.
- Connaître les différents types d'intervalles de $\mathbb{R}$.
- Savoir représenter graphiquement un intervalle sur un axe et savoir traduire un intervalle avec des inéquations.
- Savoir calculer la valeur absolue d'un nombre.
- Savoir calculer la distance entre deux nombres.
- Savoir donner un encadrement, d'amplitude donnée, d'un nombre réel par des décimaux.

Ensemble des nombres réels

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Connaître les notations $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$.
- Savoir associer à chaque point de la droite graduée un unique nombre réel et réciproquement.
- Savoir ce qu'est un intervalle de $\mathbb{R}$.
- Connaître les différents types d'intervalles de $\mathbb{R}$.
- Savoir représenter graphiquement un intervalle sur un axe et savoir traduire un intervalle avec des inéquations.
- Savoir calculer la valeur absolue d'un nombre.
- Savoir calculer la distance entre deux nombres.
- Savoir donner un encadrement, d'amplitude donnée, d'un nombre réel par des décimaux.

Ensemble des nombres réels

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Connaître les notations $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$.
- Savoir associer à chaque point de la droite graduée un unique nombre réel et réciproquement.
- Savoir ce qu'est un intervalle de $\mathbb{R}$.
- Connaître les différents types d'intervalles de $\mathbb{R}$.
- Savoir représenter graphiquement un intervalle sur un axe et savoir traduire un intervalle avec des inéquations.
- Savoir calculer la valeur absolue d'un nombre.
- Savoir calculer la distance entre deux nombres.
- Savoir donner un encadrement, d'amplitude donnée, d'un nombre réel par des décimaux.