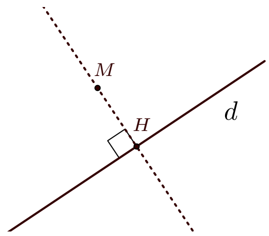
Configurations dans le plan

I Projeté orthogonal d'un point sur une droite

Définition I.1

Soit d une droite et M un point du plan. On appelle projeté orthogonal de M sur la droite d le point H tel que $(MH) \perp d$.



Exemple I.1 — Soit $ABCD$ un carré de centre O. Donner le projeté orthogonal de :
1. B sur (CD) 2. A sur (BD) 3. B sur (AB) → À rédiger

Proposition I.2

Le projeté orthogonal H du point M sur une droite d est le point de cette droite qui est le plus proche de M. La distance MH s'appelle alors la distance du point M à le droite d.

Démonstration. → À rédiger

Exemple I.2 — Soit ABC un triangle et K le pied de la hauteur issue de C. On suppose que $AC = 7$, $AK = 6$. Déterminer la distance du point C à la droite (AB). → À rédiger

II Trigonométrie dans le triangle rectangle

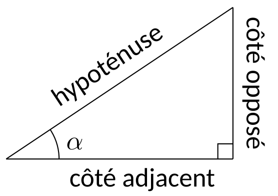
Proposition II.1

Dans un triangle rectangle, si α est un angle aigu ($0° < \alpha < 90°$) :

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{côté adjacent à } \alpha}{\text{hypoténuse}}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{côté opposé à } \alpha}{\text{hypoténuse}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{côté opposé à } \alpha}{\text{côté adjacent à } \alpha}$$



Exemple II.1 —

1. Soit ABC un triangle rectangle en B tel que $AC = 6$ et $\widehat{BCA} = 30°$. Calculer la longueur AB.
2. Soit EFG un triangle rectangle en G tel que $FG = 6$ et $EF = 13$.
   Que vaut à $0,1°$ près la mesure de l'angle $\widehat{FEG}$? → À rédiger

Proposition II.2

Dans un triangle rectangle, si α est un angle aigu alors :

$$(\cos(\alpha))^2 + (\sin(\alpha))^2 = 1$$

Démonstration. → À rédiger

Remarque — On note cela aussi plus simplement $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$.

Exemple II.2 — Soit ABC un triangle équilatéral de côté 5,6cm.

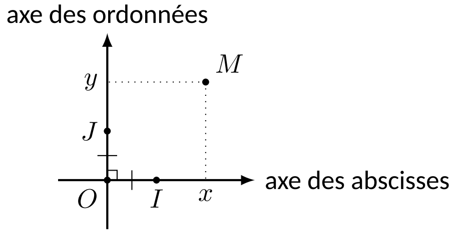
1. Montrer que $\cos(60°) = \frac{1}{2}$.
2. En déduire la valeur exacte de $\sin(60°)$. → À rédiger

III Distances et milieux dans un repère

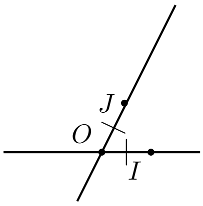
1. Repères orthonormés

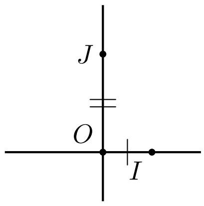
Définition III.1

Soit O, I et J trois points du plan.
On dit que le triplet $(O; I; J)$ est un **repère orthonormé** si le triangle OIJ est rectangle et isocèle en O.



Exemple III.1 — Dans chaque cas, dire si le repère $(O; I; J)$ est orthonormé en justifiant la réponse :

a) 

b) 

→ À rédiger

Exemple III.2 — Tracer un repère orthonormé $(O; I; J)$ et placer les points suivants : $A(3; 2)$, $B(-1; 2)$ et $C(-4; 4)$.
Placer des points M et N tels que :

- M a la même abscisse que A
- N a la même ordonnée que B

→ À rédiger

2. Coordonnées du milieu

Proposition III.2

Les coordonnées du milieu M d'un segment $[AB]$ sont

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Exemple III.3 — Soit $A(3; -5)$ et $B(2; 2)$. Calculer les coordonnées du milieu M de $[AB]$. → À rédiger

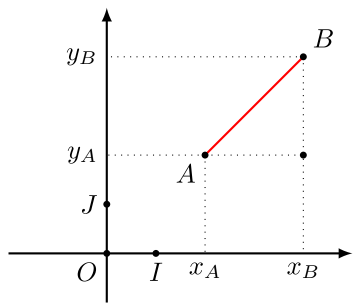
3. Distance entre deux points

Exemple III.4 — Dans un repère orthonormé $(O; I; J)$ on considère les points $A(2; -3)$ et $B(-1; 2)$. A l'aide du théorème de Pythagore, calculer la distance AB.
→ À rédiger

Proposition III.3

Dans un repère orthonormé $(O; I; J)$, la distance du point $A(x_A; y_A)$ au point $B(x_B; y_B)$ est

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



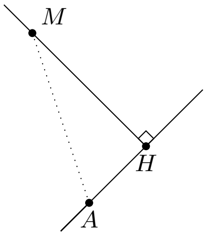
Exemple III.5 — Dans un repère orthonormé $(O; I; J)$ on considère les points $A(-3; -1)$, $B(-2; 2)$ et $C(3; -3)$. Le triangle ABC est-il rectangle ? Justifier la réponse.
→ À rédiger

Solutions

Exemple I.1

1. C
2. O
3. B

Démonstration de la proposition I.2
Soit Δ une droite, soit M un point du plan et H son projeté orthogonal sur Δ.
1er cas. Si $M \in \Delta$ alors $M = H$ et donc H est bien le point de la droite Δ le plus proche de M.
2ème cas. Si $M \notin \Delta$ alors si A est un point de Δ distinct de H, le triangle AHM est rectangle en H. D'après le théorème de Pythagore, $MA^2 = MH^2 + HA^2$. Comme H et H sont distincts alors $HA > 0$ donc $HA^2 > 0$ donc $MA^2 > MH^2$ donc $MA > MH$.



Autre méthode : comme MA est l'hypoténuse du triangle rectangle MAH, on a directement $MA > MH$.

Exemple I.2
La distance de C à la droite (AB) est CK. D'après Pythagore, $AC^2 = AK^2 + CK^2$ donc $7^2 = 6^2 + CK^2$ donc $CK^2 = 13$ donc $CK = \sqrt{13}$.

Exemple II.1

1. $\sin(30°) = \dfrac{AB}{6}$ donc $AB = 6 \times \sin(30°) = 3$
2. $\tan\left(\widehat{FEG}\right) = \dfrac{6}{13}$ donc $\widehat{FEG} = \tan^{-1}\left(\dfrac{6}{13}\right) \simeq 24,8°$

Démonstration de la proposition II.2
On considère un triangle rectangle ABC donc un des angles aigus est α.
$\cos(\alpha) = \dfrac{AB}{BC}$ et $\sin(\alpha) = \dfrac{AC}{BC}$ donc
$(\cos(\alpha))^2 + (\sin(\alpha))^2 = \dfrac{AB^2}{BC^2} + \dfrac{AC^2}{BC^2} = \dfrac{AB^2 + AC^2}{BC^2}$
Or, $AB^2 + AC^2 = BC^2$ donc
$(\cos(\alpha))^2 + (\sin(\alpha))^2 = \dfrac{BC^2}{BC^2} = 1$

Exemple II.2

1. On note H le pied de la hauteur issue de C et on se place dans le triangle rectangle ACH. On a $\cos\left(\widehat{HAC}\right) = \dfrac{AH}{AC}$ donc $\cos(60°) = \dfrac{2,8}{5,6} = \dfrac{1}{2}$.
2. $(\cos(60°))^2 + (\sin(60°))^2 = 1$ donc $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (\sin(60°))^2 = 1$ donc $\frac{1}{4} + (\sin(60°))^2 = 1$ d'où $(\sin(60°))^2 = \dfrac{3}{4}$.

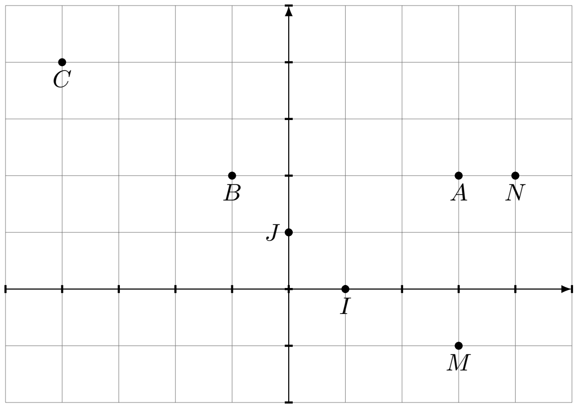
   On en déduit que $\sin(60°) = \sqrt{\frac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Exemple III.1

a) Ce n'est pas un repère orthonormé car les droites ne sont pas perpendiculaires.

b) Ce n'est pas un repère orthonormé car $OI \neq OJ$.

Exemple III.2
Voici la figure :



Exemple III.3
$M(2,5; -1,5)$

Exemple III.4
$AB = \sqrt{34}$

Exemple I.5
$AB = \sqrt{10}$ $AC = \sqrt{40}$ $BC = \sqrt{50}$
On a $AB^2 + AC^2 = \sqrt{10}^2 + \sqrt{40}^2 = 10 + 40 = 50$ et $BC^2 = 50$ donc $AB^2 + AC^2 = BC^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle est rectangle en A.

Configurations dans le plan

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir déterminer le projeté orthogonal d'un point sur une droite.
- Savoir calculer la distance d'un point à une droite.
- Connaître et savoir appliquer les relations trigonométriques dans un triangle rectangle pour calculer des longueurs ou des angles.
- Connaître la relation $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$.
- Savoir calculer les coordonnées du milieu de deux points dans un repère.
- Savoir calculer la distance entre deux points dans un repère orthonormé.

Démonstrations à connaître.

- Savoir montrer que le projeté orthogonal d'un point sur une droite est le point de cette droite le plus proche.
- Savoir démontrer que $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$.

Configurations dans le plan

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir déterminer le projeté orthogonal d'un point sur une droite.
- Savoir calculer la distance d'un point à une droite.
- Connaître et savoir appliquer les relations trigonométriques dans un triangle rectangle pour calculer des longueurs ou des angles.
- Connaître la relation $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$.
- Savoir calculer les coordonnées du milieu de deux points dans un repère.
- Savoir calculer la distance entre deux points dans un repère orthonormé.

Démonstrations à connaître.

- Savoir montrer que le projeté orthogonal d'un point sur une droite est le point de cette droite le plus proche.
- Savoir démontrer que $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$.

Configurations dans le plan

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir déterminer le projeté orthogonal d'un point sur une droite.
- Savoir calculer la distance d'un point à une droite.
- Connaître et savoir appliquer les relations trigonométriques dans un triangle rectangle pour calculer des longueurs ou des angles.
- Connaître la relation $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$.
- Savoir calculer les coordonnées du milieu de deux points dans un repère.
- Savoir calculer la distance entre deux points dans un repère orthonormé.

Démonstrations à connaître.

- Savoir montrer que le projeté orthogonal d'un point sur une droite est le point de cette droite le plus proche.
- Savoir démontrer que $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$.