Statistiques

Analyse de l'information chiffrée

Vocabulaire

- En statistiques, une population est un ensemble d'individus (personnes ou objets).
- Un caractère d'une population est une propriété des individus de cette population. Un caractère peut prendre plusieurs valeurs.

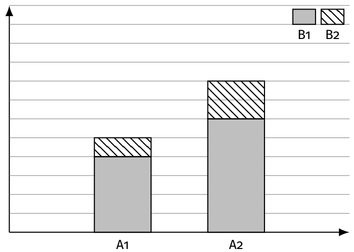
Tableaux croisés d'effectifs

- Un tableau croisé d'effectifs est un tableau à double entrée dans lequel les valeurs d'un premier caractère A sont présentées en ligne et les valeurs d'un second caractères B sont présentées en colonne.
- La dernière ligne et la dernière colonne d'un tableau croisé d'effectifs s'appellent les marges du tableau et contiennent l'effectif total de chaque valeur des caractères. Ces effectifs totaux s'appellent aussi les effectifs marginaux.

A \ B	B_1	B_2	B_3	Total
A_1				
A_2				
Total				

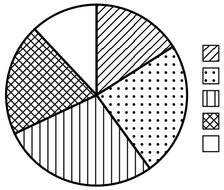
Diagrammes en barres

- Un diagramme en barres est un graphique représentant une série statistique composé de segments ou de rectangles verticaux dont la hauteur est proportionnelle à l'effectif de la valeur qu'il représente.
- Lorsqu'on étudie deux caractères en même temps, on peut mettre les barres côte à côte ou les empiler.



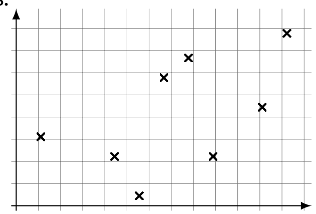
Diagrammes circulaires

- Un diagramme circulaire est un disque représentant une série statistique partagé en secteurs angulaires représentant chacun une valeur d'un caractère.
- La mesure de l'angle de chaque secteur est proportionnelle à l'effectif de la valeur à laquelle il correspond.



Nuages de points

Pour chaque individu d'une population, on peut tracer dans un repère le point dont l'abscisse est la valeur d'un premier caractère et l'ordonnée est la valeur d'un second caractère. L'ensemble des points obtenus s'appelle le nuage de points associé à ces deux caractères.



Fonctions ET, OU et NON du tableur

Dans un tableur,

- la fonction ET renvoie VRAI si toutes les conditions sont vraies et renvoie FAUX sinon
  `ET(condition_1 ; condition_2 ; ...)`
- la fonction OU renvoie VRAI si au moins l'une des conditions est vraie et renvoie FAUX sinon
  `OU(condition_1 ; condition_2 ; ...)`
- la fonction NON renvoie FAUX si la condition est vraie et renvoie VRAI si la condition est fausse
  `NON(condition)`

Filtrer des données avec un tableur

- Avec un tableur, il est possible de n'afficher que les données pour lesquelles un certain caractère prend une certaine valeur. On appelle cela filtrer les données.
- Pour filtrer des données, on se rend dans le menu `Données` puis on choisit `Filtrer` (pour Excel) ou `Autofiltre` (pour LibreOffice Calc). On clique ensuite sur les icônes apparues dans la première ligne pour sélectionner les valeurs à retenir.

Représentations graphiques avec un tableur

Pour représenter des données à l'aide d'un tableur, on se rend dans le menu `Insertion` puis on sélectionne `Graphique` (pour Excel) ou `Diagramme` (pour LibreOffice Calc).

Probabilités

Phénomènes aléatoires (1ère partie)

Fréquences marginales

La fréquence marginale d'une valeur a d'un caractère est le quotient de l'effectif de cette valeur par l'effectif total.

$$f(a) = \frac{\text{Effectif de la valeur } a}{\text{Effectif total}}$$

	...	...	...	Total
...				
a				Effectif de a
...				
Total				Effectif total

Pour calculer la fréquence marginale d'une valeur d'un caractère à l'aide d'un tableau croisé d'effectifs, on utilise uniquement les marges du tableau.

Fréquences conditionnelles

La fréquence conditionnelle de la valeur b parmi la valeur a est le quotient du nombre d'individus présentant les valeurs a et b par l'effectif marginal de la valeur a.

$$f_a(b) = \frac{\text{Effectif des individus vérifiant à la fois } a \text{ et } b}{\text{Effectif marginal de } a}$$

	...	b	...	Total
...				
a		Effectif vérifiant a et b		Effectif de a
...				
Total				

Probabilité conditionnelle (1)

La probabilité qu'un événement B soit réalisé sachant qu'un événement A est réalisé s'appelle la probabilité conditionnelle de B sachant A et on la note $P_A(B)$.

Probabilité conditionnelle (2)

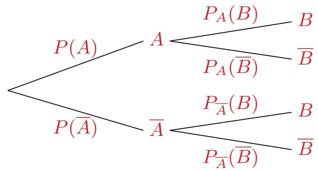
$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Probabilité d'une intersection

$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

Arbres de probabilités

On peut représenter une expérience aléatoire avec un arbre sur lequel apparaîtront des probabilités conditionnelles.



Règles dans les arbres de probabilités

- La somme de toutes les probabilités des branches issues d'un même nœud vaut 1.
- La probabilité de l'intersection d'événements est égale au produit des probabilités rencontrées lorsqu'on parcourt le chemin de l'arbre passant par ces événements.

Phénomènes aléatoires (2ème partie)

Indépendance de deux événements (1)

- Deux événements A et B sont indépendants si la probabilité de réalisation de l'un de ces événements ne dépend pas de la réalisation de l'autre.
- Autrement dit, A et B sont indépendants si, et seulement si, $P_A(B) = P(B)$ ou bien $P_B(A) = P(A)$.

Indépendance de deux événements (2)

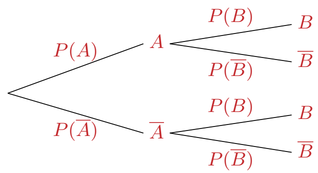
Deux événements A et B sont indépendants si, et seulement si, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Succession d'épreuves indépendantes

- On dit que deux expériences aléatoires sont indépendantes si le résultat de l'une n'a pas d'influence sur le résultat de l'autre.
- Si on effectue plusieurs expériences aléatoires successives telles que les résultats des unes n'ont pas d'influence sur les résultats des autres, on parle alors de succession d'épreuves indépendantes.

Succession d'épreuves indépendantes et arbres

On peut représenter une succession d'épreuves indépendantes à l'aide d'un arbre. La probabilité d'un événement correspondant à un chemin est égale au produit des probabilités qu'on rencontre quand on parcourt ce chemin.



Suites

Suites arithmétiques

Notion de suite

- Une suite u est une fonction définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ qui à chaque entier naturel n associe un nombre $u(n)$.
- Le nombre $u(n)$ se note aussi u_n et s'appelle le terme de rang n ou terme d'indice n de la suite u.
- La suite u se note aussi (u_n).

Modes de définition d'une suite

Soit (u_n) une suite. On dit que :

- (u_n) est définie par récurrence si on définit cette suite en donnant son premier terme u_0 ainsi qu'une relation entre u_{n+1} et u_n.
- (u_n) est définie de manière explicite si on définit cette suite à l'aide d'une formule donnant u_n en fonction de n.

Définition par récurrence d'une suite arithmétique

- On dit qu'une suite (u_n) est arithmétique si chaque terme s'obtient à partir du précédent en ajoutant toujours un même nombre r qu'on appelle la raison de la suite.
- Autrement dit, (u_n) est arithmétique s'il existe un nombre r tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.

Caractérisation d'une suite arithmétique

Une suite (u_n) est arithmétique si, pour tout entier naturel n, la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante.

Forme explicite d'une suite arithmétique (1)

Si une suite (u_n) est arithmétique de raison r alors $\boxed{u_n = u_0 + n \times r}$.

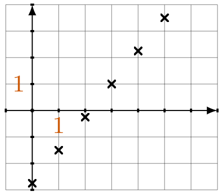
$$\underbrace{u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \quad \cdots \quad \xrightarrow{+r} u_n}_{+n \times r}$$

Forme explicite d'une suite arithmétique (2)

Si une suite arithmétique (u_n) n'est définie qu'à partir de $n = 1$ alors sa forme explicite est $u_n = u_1 + (n-1) \times r$.

Représentation graphique d'une suite arithmétique

- La représentation graphique d'une suite (u_n) dans un repère du plan est le nuage de points de coordonnées (n, u_n) pour $n \in \mathbb{N}$.
- Si (u_n) une suite est arithmétique de raison r alors les points de sa représentation graphique sont alignés et ces points sont situés sur la droite représentative de la fonction affine $f(x) = rx + u_0$.



Sens de variation d'une suite

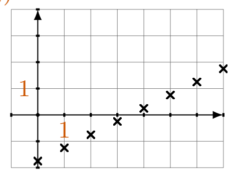
Soit (u_n) une suite. On dit que (u_n) est :

- croissante si ses termes sont dans l'ordre croissant, c'est-à-dire si pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
- décroissante si ses termes sont dans l'ordre décroissant, c'est-à-dire si pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant u_{n+1}$.
- constante si ses termes sont égaux c'est-à-dire si pour tout entier naturel n, $u_n = u_{n+1}$.

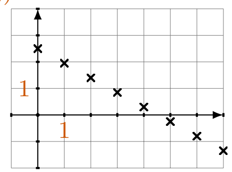
Sens de variation d'une suite arithmétique

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r alors :

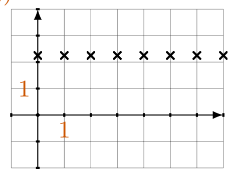
- Si $r > 0$, (u_n) est croissante



- Si $r < 0$, (u_n) est décroissante



- Si $r = 0$, (u_n) est constante



Phénomènes discrets de croissance linéaire

Toute suite arithmétique de raison r modélise une situation discrète (variable entière) dont les données successives ont des accroissements constants égaux à r. On dit que ce sont des situations discrètes à croissance (ou décroissance) linéaire.

Suites géométriques

Définition par récurrence d'une suite géométrique

- On dit qu'une suite (u_n) est géométrique si chaque terme s'obtient à partir du précédent en multipliant toujours par un même nombre q qu'on appelle la raison de la suite.
- Autrement dit, (u_n) est géométrique s'il existe un nombre q tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times q$

Caractérisation d'une suite géométrique

Une suite (u_n) est géométrique si, pour tout entier naturel n, le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant.

Forme explicite d'une suite géométrique (1)

Si une suite (u_n) est géométrique de raison q alors $\boxed{u_n = u_0 \times q^n}$.

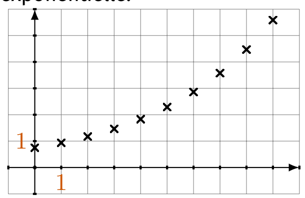
$$\underbrace{u_0 \xrightarrow{\times q} u_1 \xrightarrow{\times q} u_2 \quad \cdots \quad \xrightarrow{\times q} u_n}_{\times q^n}$$

Forme explicite d'une suite géométrique (2)

Si une suite géométrique (u_n) n'est définie qu'à partir de $n = 1$ alors sa forme explicite est $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

Représentation graphique d'une suite géométrique

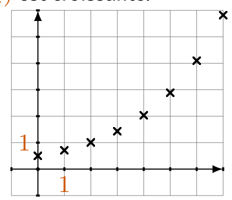
Si (u_n) une suite est géométrique alors les points de sa représentation graphique suivent ce qu'on appelle une allure exponentielle.



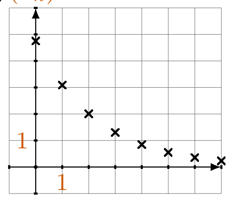
Sens de variation d'une suite géométrique

Soit (u_n) est une suite géométrique dont la raison et le premier terme sont strictement positifs.

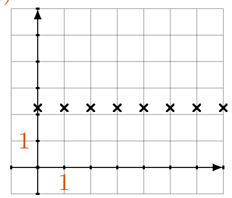
- Si $1 < q$, (u_n) est croissante.



- Si $0 < q < 1$, (u_n) est décroissante.



- Si $q = 1$, (u_n) est constante.



Phénomènes discrets de croissance exponentielle

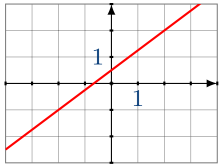
Toute suite géométrique de raison q modélise une situation discrète (variable entière) dont les données successives ont des taux d'évolution constants dont le coefficient multiplicateur associé est égal à q. On dit que ce sont des situations discrètes à croissance (ou décroissance) exponentielle.

Fonctions

Fonctions affines

Définition d'une fonction affine

- On dit qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est une fonction affine si f est de la forme $f(x) = ax + b$.
- Le nombre a s'appelle le coefficient directeur et le nombre b s'appelle l'ordonnée à l'origine.
- La représentation graphique d'une fonction affine est une droite qui a pour équation réduite $y = ax + b$.



- Si $b = 0$, on dit que f est linéaire.
- Si $a = 0$, on dit que f est constante.

Calcul du coefficient directeur

Si f est une fonction affine et si A et B sont deux points situés sur sa représentation graphique alors

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Sens de variation d'une fonction affine

Soit f une fonction affine telle que $f(x) = ax + b$.

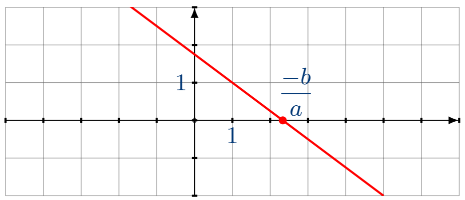
- Si $a > 0$ alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a < 0$ alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a = 0$ alors f est constante sur $\mathbb{R}$.

Signe d'une fonction affine

Soit f une fonction affine telle que $f(x) = ax + b$.

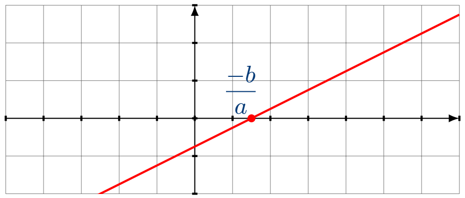
- Si $a > 0$,

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$-$	0	$+$	



- Si $a < 0$,

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$+$	0	$-$	



Taux d'accroissement d'une fonction

On appelle taux d'accroissement d'une fonction entre deux nombres x_1 et x_2 distincts le nombre

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Le taux d'accroissement mesure à quel point une fonction varie entre deux valeurs x_1 et x_2. Il peut être positif ou négatif.

Taux d'accroissement des fonctions affines

Si f est une fonction affine alors le taux d'accroissement de f entre deux nombres quelconques est toujours le même et il est égal au coefficient directeur de cette fonction.

Phénomènes continus de croissance linéaire

Les fonctions affines permettent de modéliser des phénomènes dits continus à croissance linéaire c'est-à-dire des phénomènes dans lesquels le taux d'accroissement est constant.

Fonctions exponentielles

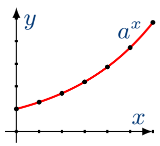
Définition des fonctions exponentielles

Soit a un nombre réel strictement positif.

- La fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = a^x$ s'appelle la fonction exponentielle de base a.
- La fonction exponentielle de base a est le prolongement de la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = a$ pour des valeurs non entières.

Représentation graphique

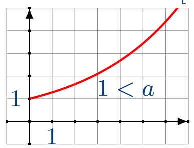
La courbe représentative d'une fonction exponentielle de base a passe par les points du nuage de point de la suite géométrique de premier terme égal à 1 et de raison a.



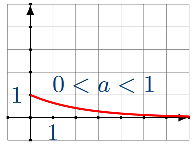
Sens de variation de $x \mapsto a^x$

Soit a un nombre réel strictement positif et f la fonction exponentielle de base a.

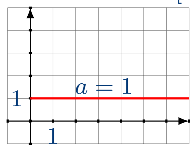
- Si $1 < a$ alors f est croissante sur $[0; +\infty[$.



- Si $0 < a < 1$ alors f est décroissante sur $[0; +\infty[$.



- Si $a = 1$ alors f est constante sur $[0; +\infty[$.



Sens de variation de $x \mapsto a^x$

Soit $a > 0$ et k un nombre réel non nul. Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = k \times a^x$.

- Si $k > 0$ alors g a le même sens de variation que la fonction exponentielle de base a.
- Si $k < 0$ alors g a un sens variation contraire à celui de la fonction exponentielle de base a.

Propriétés algébriques des fonctions exponentielles

Soit a un nombre réel strictement positif. Soit x et y deux nombres réels positifs.

- $a^x \times a^y = a^{x+y}$
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $(a^x)^y = a^{x \times y}$
- $a^0 = 1$.

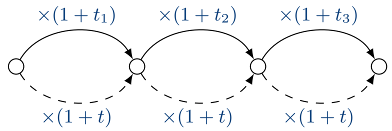
Équation $x^n = a$

Soit $a > 0$ et n un entier naturel non nul.

- L'équation $x^n = a$ possède une unique solution positive qui est $x = a^{\frac{1}{n}}$ et qu'on appelle la racine n-ème de a.
- La racine n-ème de a se note aussi $\sqrt[n]{a}$. Ainsi, $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ et, en particulier, $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$.

Taux d'évolution moyen (1)

Si une grandeur subit n évolutions successives, on appelle taux d'évolution moyen le taux d'évolution t qu'il faudrait appliquer n fois à cette quantité pour aller de la valeur de départ à la valeur d'arrivée.



Taux d'évolution moyen (2)

On considère n évolutions successives.

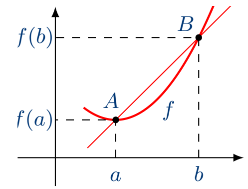
- $t_{\text{moyen}} = (1 + t_{\text{global}})^{\frac{1}{n}} - 1$
- $t_{\text{moyen}} = C_{\text{global}}^{\frac{1}{n}} - 1$

Variation instantanée

Sécante à une courbe

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

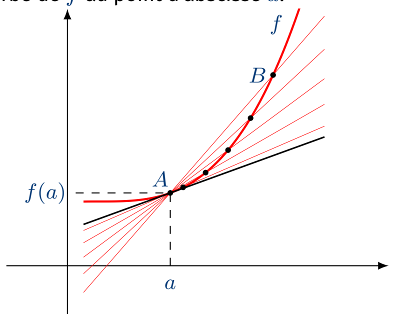
- Une droite passant par deux points $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$ situés sur la courbe de f s'appelle une sécante.
- Le coefficient directeur de cette sécante est donc le taux d'accroissement entre a et b c'est-à-dire $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.



Tangente

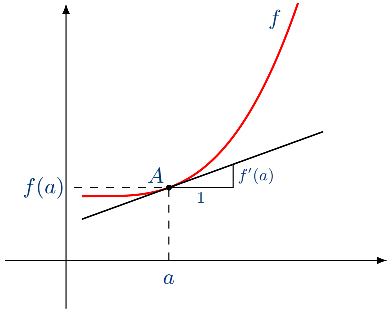
Soit a un nombre réel et soit A le point de la courbe d'une fonction f d'abscisse a.

Lorsqu'un point B de la courbe se rapproche de plus en plus du point A, la sécante (AB) se rapproche d'une position limite qui, si elle existe, s'appelle la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.



Nombre dérivé

Soit f une fonction définie et a un nombre réel.
Le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a s'appelle le nombre dérivé de f en a et on le note $f'(a)$.



Interprétation du nombre dérivé

Le nombre dérivé $f'(a)$ représente la variation instantanée de la fonction f en a. Par exemple, si f représente la position d'un objet en fonction du temps t alors le nombre $f'(t)$ représente la vitesse instantanée de l'objet au temps t.

Équation d'une tangente

Si la courbe d'une fonction f admet une tangente au point d'abscisse a alors une équation de cette tangente est

$$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$

Tangente horizontale

Si le nombre dérivé de f en a vaut 0 alors la tangente au point d'abscisse a est horizontale.

Variation globale

Fonction dérivée

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- Si la courbe de f admet une tangente en tout point, on dit que f est dérivable sur I.
- Dans ce cas, la fonction qui à tout nombre x associe le nombre dérivé $f'(x)$ s'appelle la fonction dérivée de f et se note f'.

La fonction dérivée d'une fonction f est donc la fonction qui à tout nombre x associe le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x.

Dérivées usuelles

Fonction f	Dérivable sur	Fonction dérivée f'
$f(x) = c$ (constante)	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 3x^2$

Opérations et dérivation

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et soit k un nombre réel. Les fonctions $u + v$ et $k \times u$ sont dérivables sur I et

- $(u+v)' = u' + g'$
- $(k \times u)' = k \times f'$

Dérivation et sens de variation

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

- f est croissante sur I si, et seulement si, f' est positive sur I
- f est décroissante sur I si, et seulement si, f' est négative sur I
- f est constante sur I si, et seulement si, f' est nulle sur I

Ainsi, pour connaître les variations d'une fonction, il suffit de connaître le signe de sa fonction dérivée.