Fonctions dérivées

Exercice 1
Soit f, g, h et k les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3$, $g(x) = x$, $h(x) = x^2$ et $k(x) = x^3$.

1. Donner les expressions des fonctions dérivées $f'(x)$, $g'(x)$, $h'(x)$ et $k'(x)$.
2. Déterminer les nombres dérivés suivants :
   (a) $f'(3)$
   (b) $g'(4)$
   (c) $h'(2)$
   (d) $k'(-1)$

Exercice 2
Dans chaque cas, déterminer $f'(x)$:

1. $f(x) = 7$
2. $f(x) = x + 3$
3. $f(x) = x^3 + x^2$
4. $f(x) = x^3 + x + 5$
5. $f(x) = x^3 + x^2 + x - 7$

Exercice 3
Dans chaque cas déterminer $f'(x)$:

1. $f(x) = 3$
2. $f(x) = -2,5x$
3. $f(x) = 7x^3$
4. $f(x) = \frac{7}{2}x^2$
5. $f(x) = -8x^3$
6. $f(x) = \frac{x^2}{5}$

Exercice 4
Calculer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = -3x + 2$
2. $f(x) = 5x^2 + 2x + 9$
3. $f(x) = 4x^3 + 6x^2 - 5x + 3$
4. $f(x) = x^2 - 10x + 3,7$
5. $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$

Exercice 5
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 2$.
Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 3.

Exercice 6
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x$.

1. Calculer $f'(x)$
2. Montrer que les tangentes aux points d'abscisses 2 et -2 sont parallèles.

Exercice 7
Un tonneau de 100 litres se vide en 10 minutes. À l'instant t, exprimé en minutes, la quantité d'eau déjà écoulée est donnée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par $f(t) = 20t - t^2$. Le débit à l'instant t, exprimé en litres par minutes, est $f'(t)$ où f' est la fonction dérivée de f.

1. Calculer $f'(t)$.
2. En déduire le débit d'eau à l'instant $t = 5$ secondes.

Dérivation et sens de variation

Exercice 8
On considère une fonction f définie sur l'intevalle $[-10; 10]$ pour laquelle on a dressé le tableau de variations suivant :

x	-10		-2		3		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f							

On sait de plus que $f(-10) = 0$, $f(-2) = 17$, $f(3) = -15$ et $f(10) = 12$.

1. Compléter le tableau de variations de la fonction f.
2. La fonction f admet-elle des extermums ? Si oui, lesquels ? En quels valeurs sont-ils atteints ?

Exercice 9
Dans chaque cas, on donne l'expression d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. Calculer $f'(x)$, étudier son signe et donner les variations de f sur $\mathbb{R}$ dans un tableau.

1. $f(x) = x^2 - 6x + 1$
2. $f(x) = -4x^2 + x$

Exercice 10
Soit f la fonction définie sur $[0; 10]$ par $f(x) = 11x^2 - 66x + 186$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Dresser le tableau de variations de f sur $[0; 10]$.
3. Déterminer le minimum et le maximum de f sur $[0; 10]$ et préciser en quelles valeurs ils sont atteints.

Exercice 11
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-3; 3]$ par $f(x) = -2x^3 - 1,5x^2 + 18x + 26$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Montrer que $f'(x) = (3x + 6)(3 - 2x)$.
3. Compléter le tableau de signes suivant :

x	-3	$\cdots$	$\cdots$	3
$3x + 6$				
$3x - 2$				
$f'(x)$				

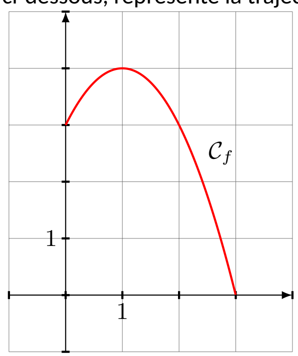
4. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur $[-3; 3]$.

Exercice 12
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-2; 2]$ par $f(x) = 5x^3 - 4,5x^2 - 6x + 2$.

1. Déterminer, pour tout nombre réel x de $[-2; 2]$, l'expression de la dérivée $f'(x)$.
2. Montrer que $f'(x) = (5x + 2)(3x - 3)$.
3. Dresser le tableau de variations de f sur $[-2; 2]$.
4. Déterminer le maximum et le minimum de f sur $[-2; 2]$.

Problèmes

Exercice 13
Un joueur de basket-ball saute et lance le ballon en l'air. La hauteur du ballon, exprimée en mètres, est modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 3]$ par $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ où x désigne la distance par rapport au joueur. La courbe représentative de la fonction f, donnée ci-dessous, représente la trajectoire du ballon.



1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0; 3]$.
3. En déduire la hauteur maximale qu'atteindra le ballon.

Exercice 14

Un artisan fabrique et vend des vases. On suppose que toute sa production est vendue. L'artisan veut faire une étude sur la production d'un nombre de vases compris entre 0 et 60. Il estime que le coût, en euros, de production de x vases fabriqués est modélisé par la fonction C dont l'expression est $C(x) = x^2 - 10x + 500$. Chaque vase est vendu 50 euros.

1. Déterminer le coût de production de 40 vases fabriqués.
2. On note $R(x)$ la recette, en euros, correspondant à la vente de x vases fabriqués. Exprimer $R(x)$ en fonction de x.
3. (a) Montrer que le bénéfice, en euros, réalisé par la fabrication et la vente de x vases est donné par la fonction B dont l'expression est $B(x) = -x^2 + 60x - 500$ où x appartient à l'intervalle $[0; 60]$.
   (b) Calculer $B'(x)$.
   (c) Déterminer le signe de $B'(x)$ et le tableau de variations de B sur $[0; 60]$.
   (d) En déduire le nombre de vases à fabriquer et à vendre pour réaliser un bénéfice maximal.

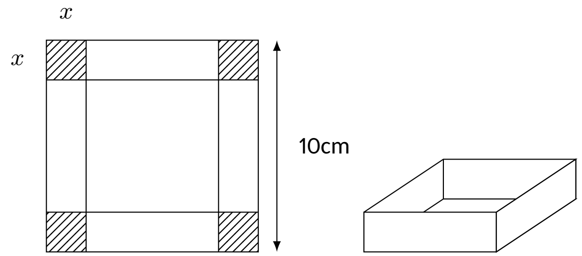
Exercice 15

Lors d'une épidémie, un institut de veille sanitaire a modélisé le nombre de personnes malades au cours de la première semaine d'épidémie. Le nombre de cas, en fonction de la durée t, en jours, est donné par la fonction f définie par $f(t) = -t^3 + 10,5t^2 + 11,25t$ sur $[0; +\infty[$.

1. Combien y aura-t-il de cas au bout de 5 jours ?
2. (a) Calculer $f'(t)$.
   (b) Montrer que $f'(t) = -3(t - 7,5)(t + 0,5)$
   (c) En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$ puis sur $[0; +\infty[$.
3. (a) On appelle « pic épidémique » le moment, lors d'une épidémie, où le nombre de cas est maximal. Si l'évolution du nombre de cas est conforme à la modélisation, déterminer le pic épidémique pour l'épidémie étudiée.
   (b) Décrire l'évolution de l'épidémie si le nombre de cas est conforme à la modélisation.

Exercice 16

On dispose d'une plaque de métal de 10cm de côté. Pour fabriquer une boite sans couvercle, on enlève à chaque coin un carré de côté x cm et on relève les bords par pliage. La boite obtenue est un pavé droit.



On souhaite déterminer les dimensions de la boite de volume maximal.

1. Quelles sont les valeurs possibles pour la variable x ?
2. On note V la fonction qui à x associe le volume de la boite en cm^3. Montrer que $V(x) = 100x - 40x^2 + 4x^3$.
3. Calculer $V'(x)$ et montrer que $V'(x) = 4(x - 5)(3x - 5)$.
4. Dresser le tableau de variations de la fonction V sur l'intervalle $[0; 5]$. On pourra donner des valeurs approchées à 10^{-2} près pour les images.
5. Pour quelle(s) valeur(s) de x le volume de la boite est maximal ? Quel est ce volume maximal ?