CHAPITRE 9

Variation globale

I Fonctions dérivées

1. Fonction dérivée

Définition I.1

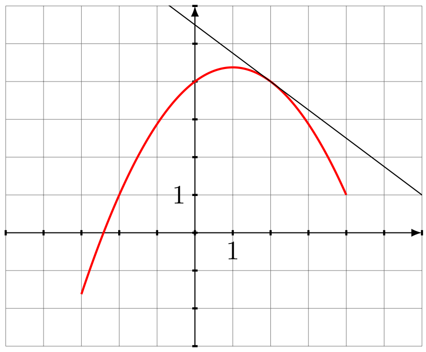
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- Si la courbe de f admet une tangente en tout point, on dit que f est **dérivable** sur I.
- Dans ce cas, la fonction qui à tout nombre x associe le nombre dérivé $f'(x)$ s'appelle la **fonction dérivée** de f et se note f'.

Remarque — La fonction dérivée d'une fonction f est donc la fonction qui à tout nombre x associe le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x.

Exemple I.1 — On considère une fonction f définie sur $[-3; 4]$ dont on donne ci-contre la courbe représentative.

1. Peut-on dire que f est dérivable sur l'intervalle $[-3; 4]$?
2. Déterminer l'image de 2 par la fonction dérivée de f. $\longrightarrow$ À rédiger



2. Dérivées usuelles

Proposition I.2

Fonction f	Dérivable sur	Fonction dérivée f'
$f(x) = c$ (constante)	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 3x^2$

Exemple I.2 — Dans chaque cas, donner la fonction dérivée de f puis calculer $f'(5)$:
(a) $f(x) = 7$ (b) $f(x) = x$ (c) $f(x) = x^2$ (d) $f(x) = x^3$ $\longrightarrow$ À rédiger

3. Opérations et dérivation

Proposition I.3

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et soit k un nombre réel. Les fonctions $u + v$ et $k \times u$ sont dérivables sur I et

- $(u + v)' = u' + g'$
- $(k \times u)' = k \times f'$

Exemple I.3 — Calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = x^2 + x$
(b) $f(x) = 5x^3$
(c) $f(x) = 3x + 2$
(d) $f(x) = 5x^2 + 4x + 1$
(e) $f(x) = 6x^3 - 7x^2 + 9x - 2$ $\longrightarrow$ À rédiger

II Dérivation et sens de variation

Proposition II.1

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

- f est croissante sur I si, et seulement si, f' est positive sur I
- f est décroissante sur I si, et seulement si, f' est négative sur I
- f est constante sur I si, et seulement si, f' est nulle sur I

Remarque — Ainsi, pour connaître les variations d'une fonction, il suffit de connaître le signe de sa fonction dérivée.

Exemple II.1 — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 12x + 20$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Quel est le minimum de f sur $\mathbb{R}$? En quelle valeur est-il atteint ? $\rightarrow$ À rédiger

Solutions

Exemple I.1

1. La courbe admet des tangentes en chacun de ses points donc la fonction f est dérivable sur $[-3; 4]$.
2. L'image de 2 par la fonction dérivée de f est le nombre dérivé $f'(2)$. D'après la tangente qui est tracé, on a :
   $f'(2) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{1-4}{6-2} = \dfrac{-3}{4} = -0,75$

Exemple I.2

(a) $f'(x) = 0$ donc $f'(5) = 0$

(b) $f'(x) = 1$ donc $f'(5) = 1$

(c) $f'(x) = 2x$ donc $f'(5) = 2 \times 5 = 10$

(d) $f'(x) = 3x^2$ donc $f'(5) = 3 \times 5^2 = 3 \times 50 = 150$

Exemple I.3

(a) $f'(x) = 2x + 1$

(b) $f'(x) = 5 \times 3x^2 = 15x^2$

(c) $f'(x) = 3 \times 1 + 0 = 3$

(d) $f'(x) = 5 \times 2x + 4 \times 1 + 0 = 10x + 4$

(e) $f'(x) = 6 \times 3x^2 - 7 \times 2x + 9 \times 1 - 0 = 18x^2 - 14x + 9$

Exemple II.1

1. $f'(x) = 3 \times 2x - 12 \times 1 + 0 = 6x - 12$
2. On commence par étudier le signe de la dérivée :
   $6x - 12 \geqslant 0 \iff 6x \geqslant 12 \iff x \geqslant \frac{12}{6} \iff x \geqslant 2$
   On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	8	$\nearrow$	

   $f(2) = 3 \times 2^2 - 12 \times 2 + 10 = 12 - 24 + 20 = 8$
3. Le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est 8. Il est atteint en $x = 2$.

À savoir faire dans ce chapitre

- Connaître les fonctions dérivées des fonctions usuelles (fonction constante, x, x^2 et x^3)
- Savoir calculer la fonction dérivée d'une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3
- Savoir établir le tableau de variation d'une fonction à partir du signe de sa dérivée
- Savoir décrire les variations d'un phénomène en mobilisant la dérivée d'une fonction
- Savoir prévoir l'évolution d'un phénomène grâce à l'étude de la dérivée d'une fonction