Fonctions exponentielles

I Fonctions exponentielles de base a

1. Définition des fonctions exponentielles

Définition I.1

Soit a un nombre réel strictement positif.

- La fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = a^x$ s'appelle la **fonction exponentielle de base** a.
- La fonction exponentielle de base a est le prolongement de la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = a$ pour des valeurs non entières.

Remarque — Les suites géométriques modélisent des phénomènes discrets de croissance exponentielle et les fonctions exponentielles modélisent des phénomènes continus de croissance exponentielle.

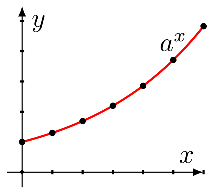
Exemple I.1 — 1. Déterminer l'image de 2 par la fonction exponentielle de base $1,5$.

2. Déterminer l'image de $4,3$ par la fonction exponentielle de base $0,8$. Arrondir à 10^{-3} près. → À rédiger

2. Représentation graphique

Proposition I.2

La courbe représentative d'une fonction exponentielle de base a passe par les points du nuage de point de la suite géométrique de premier terme égal à 1 et de raison a.



Exemple I.2 — 1. Dans un repère, tracer les cinq premiers points du nuage de points de la suite géométrique de premier terme égal à 1 et de raison $1,4$.

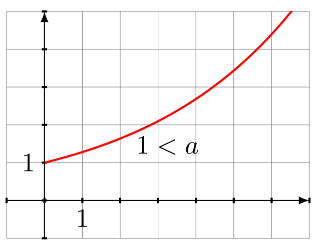
2. En déduire le tracé de la courbe de la fonction f définie par $f(x) = 1,4^x$. → À rédiger

3. Sens de variation

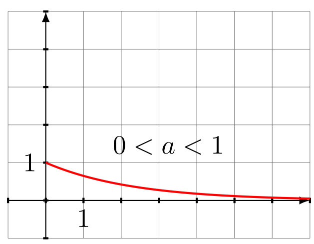
Proposition I.3

Soit a un nombre réel strictement positif et f la fonction exponentielle de base a.

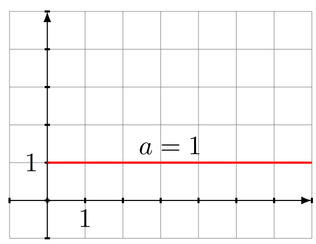
Si $1 < a$ alors f est croissante sur $[0; +\infty[$.



Si $0 < a < 1$ alors f est décroissante sur $[0; +\infty[$.



Si $a = 1$ alors f est constante sur $[0; +\infty[$.



Exemple I.3 — Dans chaque cas, déterminer le sens de variation de la fonction f sur $[0; +\infty[$:
(a) $f(x) = 2,3^x$ (b) $f(x) = 0,65^x$ (c) $f(x) = 1^x$ → À rédiger

Proposition I.4

Soit $a > 0$ et k un nombre réel non nul. Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = k \times a^x$.

- Si $k > 0$ alors g a le même sens de variation que la fonction exponentielle de base a.
- Si $k < 0$ alors g a un sens variation contraire à celui de la fonction exponentielle de base a.

Exemple I.4 — Dans chaque cas, déterminer le sens de variation de la fonction g sur $[0; +\infty[$:
(a) $g(x) = 3 \times 0,2^x$ (b) $g(x) = -4 \times 0,75^x$ → À rédiger

II Propriétés algébriques des fonctions exponentielles

Proposition II.1

Soit a un nombre réel strictement positif. Soit x et y deux nombres réels positifs.

- $a^x \times a^y = a^{x+y}$
- $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $(a^x)^y = a^{x \times y}$

Remarque — Pour tout nombre réel $a > 0$, $a^0 = 1$.

Exemple II.1 — Simplifier chacune des expressions suivantes :

(a) $4^{1,2} \times 4^{2,6}$

(b) $\dfrac{2^{5,5}}{2^{3,4}}$

(c) $\left(0,8^{3,2}\right)^2$

$\rightarrow$ À rédiger

III Application aux taux d'évolution moyens

1. Équation $x^n = a$

Proposition III.1

Soit $a > 0$ et n un entier naturel non nul.
L'équation $x^n = a$ possède une unique solution positive qui est $x = a^{\frac{1}{n}}$ et qu'on appelle la **racine n-ème** de a.

Remarque — La racine n-ème de a se note aussi $\sqrt[n]{a}$. Ainsi, $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$. En particulier, $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$.

Exemple III.1 —

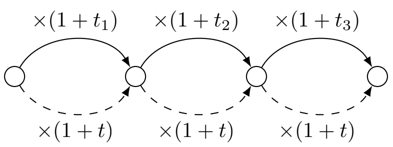
1. Résoudre l'équation $x^4 = 16$.
2. Résoudre l'équation $x^3 = 10$ et donner une valeur approchée de la solution à 10^{-2} près.

$\rightarrow$ À rédiger

2. Taux d'évolution moyen

Définition III.2

Si une grandeur subit n évolutions successives, on appelle **taux d'évolution moyen** le taux d'évolution t qu'il faudrait appliquer n fois à cette quantité pour aller de la valeur de départ à la valeur d'arrivée.



Exemple III.2 — Une artiste possédait 5000 abonnés sur un de ses réseaux sociaux il y a deux ans. La première année, son nombre d'abonnés a augmenté de 10%. La seconde année, ce nombre d'abonnés a augmenté de 30%.

1. Déterminer le nombre d'abonnés de cette artiste au bout de 2 ans.
2. Combien aurait-elle eu d'abonnés si celui-ci avait augmenté de $19,58\%$ chaque année ? Arrondir le résultat à l'unité.
3. Que peut-on en déduire ?

$\rightarrow$ À rédiger

Proposition III.3

On considère n évolutions successives.

(a) $t_{\text{moyen}} = (1 + t_{\text{global}})^{\frac{1}{n}} - 1$

(b) $t_{\text{moyen}} = C_{\text{global}}^{\frac{1}{n}} - 1$

Exemple III.3 —

1. Le prix d'un article a augmenté de 30% en 5 ans. En moyenne, de quel pourcentage a-t-il augmenté chaque année ?
2. Le chiffre d'affaires d'une entreprise a été multiplié par $2,5$ en 6 ans. En moyenne, de quel pourcentage ce chiffre d'affaires a-t-il augmenté chaque année ?

$\rightarrow$ À rédiger

Solutions

Exemple I.1

1. $1,5^2 = 2,25$
2. $0,8^{4,3} \approx 0,383$

Exemple I.2

1. On a :

   $u_0 = 1,4^0 \approx 1$

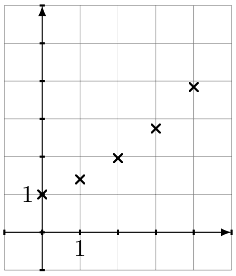
   $u_1 = 1,4^1 \approx 1,4$

   $u_2 = 1,4^2 \approx 1,96$

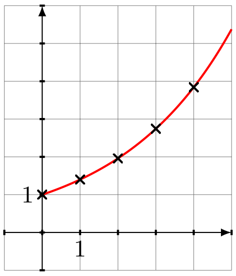
   $u_3 = 1,4^3 \approx 2,74$

   $u_4 = 1,4^4 \approx 3,84$

   On a donc le nuage de points suivant :

2. On trace la courbe de la fonction f en passant par les points du nuage de points :

Exemple I.3

(a) Comme $1 < 2,3$ alors f est croissante sur $[0; +\infty[$.

(b) Comme $0 < 0,65 < 1$ alors f est décroissante sur $[0; +\infty[$.

(c) f est constante sur $[0; +\infty[$.

Exemple I.4

(a) La fonction $x \mapsto 0,2^x$ est décroissante sur $[0; +\infty[$ car $0 < 0,2 < 1$. Puisque $3 > 0$ alors g est aussi décroissante sur $[0; +\infty[$.

(b) La fonction $x \mapsto 0,0,75^x$ est décroissante sur $[0; +\infty[$ car $0 < 0,75 < 1$. Puisque $-4 < 0$ alors g est croissante sur $[0; +\infty[$.

Exemple II.1

(a) $4^{1,2} \times 4^{2,6} = 4^{1,2+2,6} = 4^{3,8}$

(b) $\dfrac{2^{5,5}}{2^{3,4}} = 2^{5,5-3,4} = 2^{2,1}$

(c) $\left(0,8^{3,2}\right)^2 = 0,8^{3,2\times 2} = 0,8^{6,4}$

Exemple III.1

1. $x^4 = 16 \iff x = 16^{\frac{1}{4}} \iff x = 2$
2. $x^3 = 10 \iff x = 10^{\frac{1}{3}} \iff x \approx 2,15$

Exemple III.2

1. $C_1 = 1 + \frac{10}{100} = 1,1$ et $C_2 = 1 + \frac{30}{100} = 1,3$ donc $C_{\text{global}} = C_1 \times C_2 = 1,1 \times 1,3 = 1,43$.

   $5000 \times 1,43 = 7150$ donc cette artiste a 7150 abonnés au bout de deux ans.

2. $C_1 = 1 + \frac{19,58}{100} = 1,1958$ et $C_2 = 1 + \frac{19,58}{100} = 1,1958$ donc $C_{\text{global}} = C_1 \times C_2 = 1,1958 \times 1,1958 = 1,1958^2$.

   $5000 \times 1,1958^2 \approx 7150$

   Si le nombre d'abonnés avait augmenté de $19,58\%$ chaque année, elle aurait eu aussi 7150 abonnés.

3. On en déduit que le nombre d'abonnés de cette artiste a augmenté en moyenne de $19,58\%$ par an.

Exemple III.3

1. Puisque $t_{\text{global}} = 0,3$ alors $t_{\text{moyen}} = (1+0,3)^{\frac{1}{5}} - 1 = 1,3^{\frac{1}{5}} - 1 \approx 0,054$.

   En moyenne, le prix de cet article a augmenté d e$5,4\%$ chaque année.

2. Puisque $C_{\text{global}} = 2,5$ alors $t_{\text{moyen}} = 2,5^{\frac{1}{6}} - 1 = 1,3^{\frac{1}{5}} - 1 \approx 0,165$.

   En moyenne, le chiffre d'affaires de cette entreprise a augmenté de $16,5\%$ chaque année.

À savoir faire dans ce chapitre

- Connaître la définition d'une fonction exponentielle de base a
- Savoir tracer la représentation graphique d'une fonction exponentielle de base a
- Savoir reconnaître un phénomène continu de croissance exponentielle et savoir le modéliser
- Savoir déterminer le sens de variation des fonctions $x \mapsto a^x$
- Savoir déterminer le sens de variation des fonctions $x \mapsto k \times a^x$
- Savoir utiliser les propriétés algébriques des fonctions exponentielles
- Savoir résoudre une équation de la forme $x^n = a$
- Savoir calculer un taux d'évolution moyen
- Savoir résoudre un problème de seuil dans le cas d'une croissance exponentielle par le calcul, à l'aide d'une représentation graphique ou en utilisant un outil numérique