Phénomènes aléatoires (2ème partie)

I Indépendance de deux événements

Définition I.1

Soit A et B deux événements d'une expérience aléatoire de probabilités non nulles.

- On dit que A et B sont **indépendants** si la probabilité de réalisation de l'un de ces événements ne dépend pas de la réalisation de l'autre.
- Autrement dit, A et B sont indépendants si, et seulement si, $P_A(B) = P(B)$ ou bien $P_B(A) = P(A)$.

Exemple I.1 — Un jeu de 52 cartes est constitué de quatre couleurs (pique, cœur, carreau et trèfle) et de treize valeurs (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi, As). Un jeu consiste à tirer une carte au hasard dans ce jeu de cartes.

1. Montrer que les événements A : « obtenir un Roi » et B : « Obtenir un pique » sont indépendants.
2. Les événements A : « obtenir un cœur » et B : « obtenir un Roi de cœur » sont-ils indépendants ? Justifier. → À rédiger

Proposition I.2

Deux événements A et B sont indépendants si, et seulement si, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Exemple I.2 — On lance un dé à six faces bien équilibré et on considère les événements A : « obtenir un 4 » et B : « obtenir un mulitple de 2 ».

1. Déterminer $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$.
2. Les événements A et B sont-ils indépendants ? → À rédiger

Exemple I.3 — Sur son trajet pour aller travailler, un automobiliste rencontre deux feux tricolores. La probabilité pour que le premier feu soit vert lorsqu'il arrive à sa hauteur est $0,6$ et la probabilité pour que le deuxième feu soit vert est $0,55$. On note A l'événement « Le premier feu est vert » et B l'événement « Le deuxième feu est vert ». On fait l'hypothèse que ces deux événements sont indépendants. Quelle est la probabilité que l'automobiliste fasse son trajet sans avoir à s'arrêter à l'un des deux feux ? → À rédiger

II Succession d'épreuves indépendantes

Définition II.1

- On dit que deux expériences aléatoires sont **indépendantes** si le résultat de l'une n'a pas d'influence sur le résultat de l'autre.
- Si on effectue plusieurs expériences aléatoires successives telles que les résultats des unes n'ont pas d'influence sur les résultats des autres, on parle alors de **succession d'épreuves indépendantes**.

Remarque — On peut réprésenter une succession d'épreuves indépendantes à l'aide d'un arbre. Dans ce cas, la probabilité d'un événement correspondant à un chemin est égale au produit des probabilités qu'on rencontre quand on parcourt ce chemin.

Exemple II.1 — Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à 5. Deux de ces boules sont bleues et les autres sont rouges. On tire au hasard une boule dans l'urne, on note son numéro puis on remet la boule dans l'urne. On effectue alors un deuxième tirage au hasard et on note la couleur de la boule cette fois-ci. On note :

- A : « obtenir un 3 au premier tirage »
- B : « obtenir une boule bleue au deuxième tirage »

1. Justifier que ces deux expériences aléatoires sont indépendantes.
2. Représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilité.
3. Calculer la probabilité que la première boule tirée porte le numéro 3 et que la deuxième boule tirée soit verte.

→ À rédiger

Solutions

Exemple I.1

1. $P(B) = \dfrac{13}{52} = \dfrac{1}{4}$

   $P_A(B) = \dfrac{1}{4}$ (parmi les quatre Roi du jeu, un seul est un pique)

   donc $P_A(B) = P(B)$ ce qui montre que les événements A et B sont indépendants.

2. $P(B) = \dfrac{1}{52}$

   $P_A(B) = \dfrac{1}{13}$ (parmi les cœurs, un seul est un Roi)

   donc $P_A(B) \neq P(B)$ donc A et B ne sont pas indépendants.

Exemple I.2

1. Comme $A = \{4\}$, $B = \{2; 4; 6\}$ et $A \cap B = \{4\}$ alors

   $P(A) = \dfrac{1}{6}$, $P(B) = \dfrac{3}{6}$ et $P(A \cap B) = \dfrac{1}{6}$

2. $P(A) \times P(B) = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{36}$

   Puisque $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$, on en déduit que A et B ne sont pas indépendants.

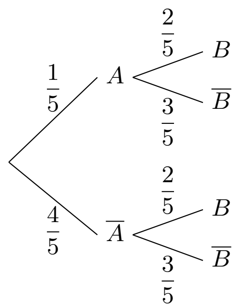
Exemple I.3

Puisque A et B sont indépendants,
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
donc $P(A \cap B) = 0,6 \times 0,55 = 0,33$

Exemple II.1

1. Étant donné que la première boule est remise dans l'urne une fois qu'elle a été tirée, le résultat du deuxième tirage ne dépend donc pas du résultat du premier tirage. Les épreuves sont donc indépendantes.

2. On a l'arbre de probabilités suivant :



3. $P\left(A \cap \overline{B}\right) = \dfrac{1}{5} \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{3}{25}$

À savoir faire dans ce chapitre

- Savoir montrer que deux événements sont indépendants
- Savoir utiliser le fait que deux événements sont indépendants grâce à la formule $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
- Savoir ce qu'on appelle des expériences aléatoires indépendantes
- Savoir étudier une succession d'épreuves indépendantes