CHAPITRE 6

Suites géométriques

I Définition par récurrence d'une suite géométrique

Définition I.1

On dit qu'une suite (u_n) est **géométrique** si chaque terme s'obtient à partir du précédent en multipliant toujours par un même nombre q qu'on appelle la **raison** de la suite.

Autrement dit, (u_n) est géométrique s'il existe un nombre q tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n \times q$$

Remarque — Une suite (u_n) est géométrique si, pour tout entier naturel n, le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant.

Exemple I.1 — Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 3$. Donner la relation de récurrence vérifiée par la suite (u_n) puis calculer u_2. $\rightarrow$ À rédiger

Exemple I.2 — Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = n^2 + 4$. Montrer que cette suite n'est pas géométrique. $\rightarrow$ À rédiger

II Forme explicite d'une suite géométrique

Proposition II.1

Si une suite (u_n) est géométrique de raison q alors $\boxed{u_n = u_0 \times q^n}$.

$$\begin{tikzcd}
u_0 \arrow[r, bend left, dashed, "\times q"] \arrow[rrrrr, bend right, "\times q^n"'] & u_1 \arrow[r, bend left, dashed, "\times q"] & u_2 \arrow[r, bend left, dashed, "\times q"] & u_3 & \cdots \arrow[r, bend left, dashed, "\times q"] & u_n
\end{tikzcd}$$

Remarque — Si la suite (u_n) n'est définie qu'à partir de $n = 1$ alors sa forme explicite est $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

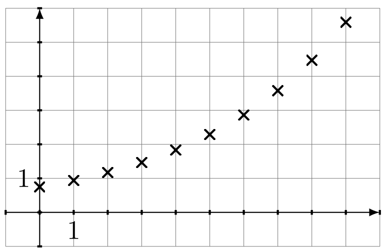
Exemple II.1 — Soit (u_n) la suite géométrique de raison $q = 4$ et de premier terme $u_0 = 10$.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Calculer u_5 en utilisant la relation la plus adaptée. $\rightarrow$ À rédiger

III Représentation graphique d'une suite géométrique

Définition III.1

Si (u_n) une suite est géométrique alors les points de sa représentation graphique suivent ce qu'on appelle une allure **exponentielle**.



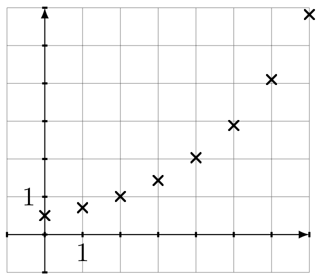
Exemple III.1 — On considère la suite géométrique de premier terme $u_0 = 0,25$ et de raison $q = 2$. Déterminer les cinq premiers termes de cette suite puis représenter cette suite dans un repère. $\rightarrow$ À rédiger

IV Sens de variation d'une suite géométrique

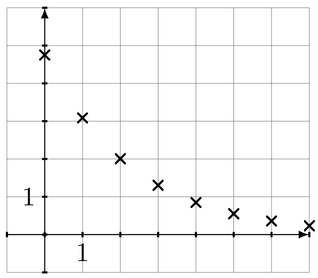
Proposition IV.1

Soit (u_n) est une suite géométrique dont la raison et le premier terme sont strictement positifs.

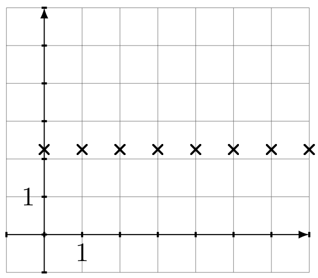
Si $1 < q$, (u_n) est croissante.



Si $0 < q < 1$, (u_n) est décroissante.



Si $q = 1$, (u_n) est constante.



Remarque — Ainsi, toute suite géométrique de raison q modélise une situation discrète (variable entière) dont les données successives ont des taux d'évolution constants dont le coefficient multiplicateur associé est égal à q. On dit que ce sont des situations **discrètes à croissance (ou décroissance) exponentielle**.

Exemple IV.1 — On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $q = 0,7$.

1. Quel est le sens de variation de cette suite ? Justifier.
2. Déterminer l'expression du terme général u_n de cette suite.
3. En calculant les termes successivement, déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \leqslant 1,25$. $\longrightarrow$ À rédiger

Solutions

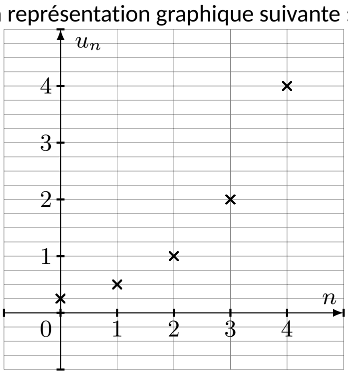
Exemple I.1
La relation de récurrence est $u_{n+1} = u_n \times 3$.
$u_1 = u_0 \times 3 = 2 \times 3 = 6$
$u_2 = u_1 \times 3 = 6 \times 3 = 18$

Exemple I.2
$v_0 = 0^2 + 4 = 0 + 4 = 4$
$v_1 = 1^2 + 4 = 1 + 4 = 5$
$v_2 = 2^2 + 4 = 4 + 4 = 8$
$\frac{v_1}{v_0} = \frac{5}{4} = 1,25$
$\frac{v_2}{v_1} = \frac{8}{5} = 1,6$
Comme $\frac{v_1}{v_0} \neq \frac{v_2}{v_1}$ alors la suite (u_n) n'est pas une suite géométrique.

Exemple II.1

1. $u_{n+1} = u_n \times 4$
2. $u_n = u_0 \times q^n$ donc $u_n = 10 \times 4^n$
3. $u_5 = 10 \times 4^5 = 10 \times 1024 = 10240$

Exemple III.1
$u_0 = 0,25$
$u_1 = u_0 \times 2 = 0,25 \times 2 = 0,5$
$u_2 = u_1 \times 2 = 0,5 \times 2 = 1$
$u_3 = u_2 \times 2 = 1 \times 2 = 2$
$u_4 = u_3 \times 2 = 2 \times 2 = 4$
On a donc la représentation graphique suivante :



Exemple IV.1

1. Comme $0 < 0,7 < 1$, on en déduit que la suite (u_n) est décroissante.
2. $u_n = u_0 \times q^n$ donc $u_n = 5 \times 0,7^n$
3. $u_0 = 5$
   $u_1 = u_0 \times 2 = 5 \times 0,7 = 3,5$
   $u_2 = u_1 \times 2 = 3,5 \times 0,7 = 2,45$
   $u_3 = u_2 \times 2 = 2,45 \times 0,7 = 1,715$
   $u_4 = u_3 \times 2 = 1,715 \times 0,7 = 1,2005$
   Ainsi, le plus petit entier naturel n tel que $u_n \leqslant 1,25$ est $n = 4$.

À savoir faire dans ce chapitre

- Savoir ce qu'est une suite géométrique
- Savoir justifier qu'une suite est géométrique
- Savoir reconnaître un phénomène discret de croissance exponentielle et le modéliser avec une suite géométrique
- Savoir justifier qu'une suite n'est pas géométrique
- Savoir déterminer la raison d'une suite géométrique
- Savoir calculer un terme de rang donné d'une suite géométrique
- Savoir déterminer l'expression explicite d'une suite géométrique
- Savoir étudier un phénomène discret de croissance exponentielle avec une suite géométrique
- Savoir représenter graphiquement une suite géométrique
- Savoir exploiter la représentation graphique d'une suite géométrique
- Savoir déterminer le sens de variation d'une suite géométrique à partir de sa raison
- Savoir résoudre un problème de seuil dans le cas d'une croissance exponentielle