Variation instantanée

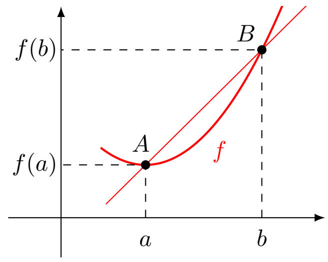
I Tangente à la courbe d'une fonction

1. Sécante à une courbe

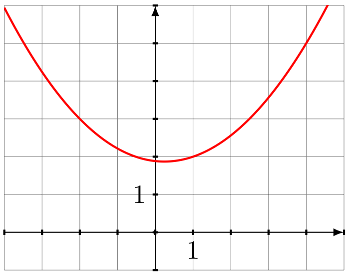
Définition I.1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- Une droite passant par deux points $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$ situés sur la courbe de f s'appelle une **sécante**.
- Le coefficient directeur de cette sécante est donc le taux d'accroissement entre a et b c'est-à-dire $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



Exemple I.1 — On donne ci-contre la courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. Tracer la sécante passant par les points A et B d'abscisses 1 et 4 puis calculer son coefficient directeur. → À rédiger

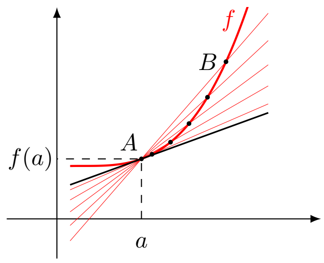


2. Tangente

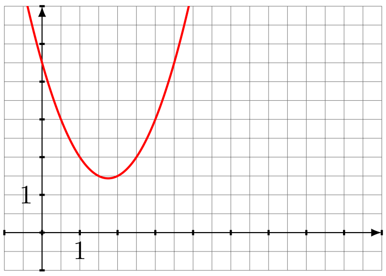
Définition I.2

Soit a un nombre réel et soit A le point de la courbe d'une fonction f d'abscisse a.

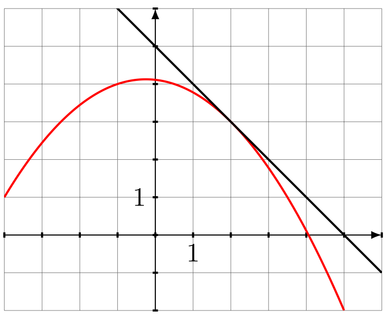
Lorsqu'un point B de la courbe se rapproche de plus en plus du point A, la sécante (AB) se rapproche d'une position limite qui, si elle existe, s'appelle la **tangente** à la courbe de f au point d'abscisse a.



Exemple I.2 — On donne la courbe d'une fonction f ci-contre. Tracer la tangente à la courbe de f au point A d'abscisse 2 sachant que le coefficient directeur de cette tangente est égal à $0,5$. → À rédiger



Exemple I.3 — On a tracé ci-contre la courbe représentative d'une fonction f ainsi que la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 1. Déterminer l'équation réduite de la tangente T. → À rédiger



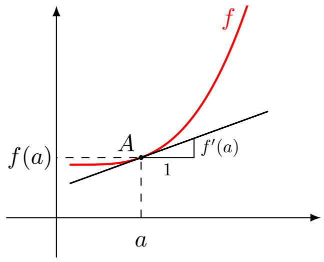
II Nombre dérivé

1. Définition du nombre dérivé

Définition II.1

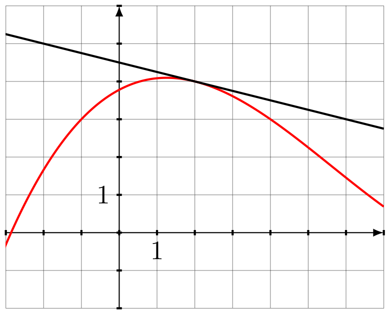
Soit f une fonction définie et a un nombre réel.

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a s'appelle le **nombre dérivé** de f en a et on le note $f'(a)$.



Remarque — Le nombre dérivé $f'(a)$ représente donc la variation instantanée de la fonction f en a. Par exemple, si f représente la position d'un objet en fonction du temps t alors le nombre $f'(t)$ représente la vitesse instantanée de l'objet au temps t.

Exemple II.1 — On a représenté ci-contre la courbe d'une fonction f ainsi que la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2. Déterminer le nombre dérivé de f en 2 noté $f'(2)$. → À rédiger



Exemple II.2 — La tangente à la courbe d'une fonction f au point d'abscisse 3 a pour équation réduite $y = -5x + 1$. Que vaut le nombre dérivé $f'(3)$? → À rédiger

2. Équation d'une tangente

Proposition II.2

Si la courbe d'une fonction f admet une tangente au point d'abscisse a alors une équation de cette tangente est

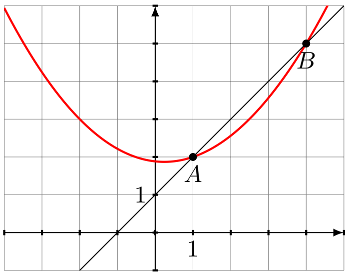
$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Remarque — Si le nombre dérivé de f en a vaut 0 alors la tangente au point d'abscisse a est horizontale.

Exemple II.3 — Soit f une fonction telle que $f(1) = 3$ et $f'(1) = 4$. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1. → À rédiger

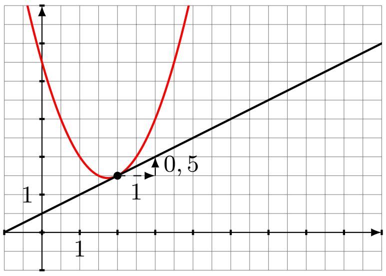
Solutions

Exemple I.1
Voici le tracé de la sécante :



Le coefficient directeur de la sécante (AB) est le taux d'accroissement entre 1 et 4 c'est-à-dire
$\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1} = \dfrac{5-2}{4-1} = \dfrac{3}{3} = 1$

Exemple I.2
Voici le tracé de la tangente à la courbe de f en 2 :



Exemple I.3
Coefficient directeur. Les points $A(2,3)$ et $B(5,0)$ sont situés sur la tangente donc le coefficient directeur de cette droite est
$a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{0-3}{5-2} = \dfrac{-3}{3} = -1$
Ordonnée à l'origine. Graphiquement, on voit que l'ordonnée à l'origine vaut $b = 5$.
On en déduit que l'équation réduite de la tangente T est $y = -x + 5$.

Exemple II.1
Le nombre dérivé $f'(2)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2. Les points $A(2,4)$ et $B(6,3)$ sont situés sur la tangente en 2 donc
$f'(2) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{3-4}{6-2} = \dfrac{-1}{4} = -0,25$

Exemple II.2
Le nombre dérivé $f'(3)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 3. Comme le coefficient directeur vaut -5, on a donc $f'(3) = -5$.

Exemple II.3
Une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 est

$$\begin{aligned} y = f'(1)(x-1) + f(1) &\iff y = 4(x-1) + 3 \\ &\iff y = 4x - 4 + 3 \\ &\iff y = 4x - 1 \end{aligned}$$

À savoir faire dans ce chapitre

- Connaître le lien entre le coefficient directeur d'une sécante et le taux d'accroissement
- Savoir tracer la tangente à la courbe d'une fonction à partir de son coefficient directeur
- Savoir calculer un nombre dérivé à partir du coefficient directeur de la tangente
- Savoir interpréter un nombre dérivé dans le cadre d'un modèle d'évolution (vitesse instantanée par exemple)
- Savoir déterminer l'équation d'une tangente avec la formule $y = f'(a)(x - a) + f(a)$