# Phénomènes aléatoires (1ère partie)

## I Fréquences conditionnelles et fréquences marginales

### 1. Fréquences marginales

**Définition I.1**

On considère une population dans laquelle on étudie deux caractères à l'aide d'un tableau croisé d'effectifs. La **fréquence marginale** d'une valeur $a$ d'un caractère est le quotient de l'effectif de cette valeur par l'effectif total.

$$f(a) = \frac{\text{Effectif de la valeur } a}{\text{Effectif total}}$$

| | ... | ... | ... | Total |
|---|---|---|---|---|
| ... | | | | |
| $a$ | | | | Effectif de $a$ |
| ... | | | | |
| Total | | | | Effectif total |

**Remarque —** Pour calculer la fréquence marginale d'une valeur d'un caractère à l'aide d'un tableau croisé d'effectifs, on utilise uniquement les marges du tableau.

**Exemple I.1 —** Dans une classe de Première, certains élèves suivent la spécialité SES et d'autres non. Les résultats sont donnés dans le tableau croisé d'effectifs ci-contre :

1. Quel est l'effectif total de cette classe ?
2. Quel est l'effectif marginal des filles dans cette classe ?
3. En déduire la fréquence marginale des filles.
4. Calculer la fréquence marginale des élèves suivant la spécialité SES. Donner le résultat en pourcentage. $\rightarrow$ À rédiger

| | Spécialité SES | Pas spécialité SES | Total |
|---|---|---|---|
| Filles | 11 | 7 | 18 |
| Garçons | 9 | 5 | 14 |
| Total | 20 | 11 | 32 |

### 2. Fréquences conditionnelles

**Définition I.2**

On considère une population dans laquelle on étudie deux caractères à l'aide d'un tableau croisé d'effectifs. Soit $a$ une valeur du premier caractère et $b$ une valeur du deuxième caractère. La **fréquence conditionnelle** de la valeur $b$ parmi la valeur $a$ est le quotient du nombre d'individus présentant les valeurs $a$ et $b$ par l'effectif marginal de la valeur $a$.

$$f_a(b) = \frac{\text{Effectif des individus vérifiant à la fois } a \text{ et } b}{\text{Effectif marginal de } a}$$

| | ... | $b$ | ... | Total |
|---|---|---|---|---|
| ... | | | | |
| $a$ | | Effectif vérifiant $a$ et $b$ | | Effectif de $a$ |
| ... | | | | |
| Total | | | | |

**Remarque —** On parle de fréquence conditionnelle car on calcule la fréquence d'une valeur à partir d'une condition.

**Exemple I.2 —** On a demandé à des élèves d'un lycée s'ils regardent leurs films en version originale (VO) ou en version française (VF). Le tableau croisé d'effectifs ci-dessous donne la répartition des réponses :

1. Calculer la fréquence conditionnelle des élèves qui regardent les films en VO parmi les élèves de Première.
2. Calculer la fréquence conditionnelle des élèves de Première parmi ceux qui regardent les films en VF. Donner le résultat en pourcentage arrondi à $0,1\%$. $\rightarrow$ À rédiger

| | VO | VF | Total |
|---|---|---|---|
| Seconde | 5 | 51 | 56 |
| 1ère | 27 | 9 | 36 |
| Terminale | 16 | 24 | 40 |
| Total | 48 | 84 | 132 |

# II Probabilités conditionnelles

## 1. Probabilité conditionnelle

**Définition II.1**

Soit $A$ et $B$ deux événements tels que $P(A) \neq 0$. La probabilité que l'événement $B$ soit réalisé sachant que l'événement $A$ est réalisé s'appelle la **probabilité conditionnelle** de $B$ sachant $A$ et on la note $P_A(B)$.

Mathématiquement, on définit cette probabilité par $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

**Exemple II.1 —** On a recensé en fin d'année scolaire les résultats des élèves d'une classe de Terminale. On choisit un élève au hasard dans cette classe. On note $A$ l'événement « L'élève choisi est une fille » et $B$ l'événement « L'élève choisi a obtenu le baccalauréat ».

1. Déterminer $P(A)$ et $P(A \cap B)$. En déduire $P_A(B)$ et intepréter le résultat.
2. Comment aurait-on pu calculer directement $P_A(B)$ dans ce cas ? $\rightarrow$ À rédiger

| | Obtenu | Non obtenu | Total |
|---|---|---|---|
| Filles | 18 | 2 | 20 |
| Garçons | 12 | 2 | 14 |
| Total | 30 | 4 | 34 |

## 2. Probabilité d'une intersection

**Proposition II.2**

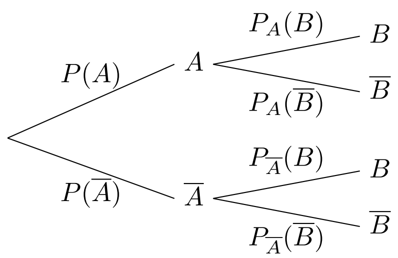
Si $A$ et $B$ sont deux événements tels que $P(A) \neq 0$ alors $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

**Exemple II.2 —** Lors d'un vol Paris-Rome, $70\%$ des passagers sont français. Parmi les passagers français, $25\%$ sont des mineurs. On choisit une personne au hasard parmi les passagers. On note $A$ : « La personne choisie est française » et $B$ : « La personne choisie est mineure ».

1. Donner $P(A)$ et $P_A(B)$.
2. Quelle est la probabilité qu'un passager choisi au hasard soit à la fois français et mineur ? $\rightarrow$ À rédiger

## 3. Arbres de probabilités

Pour représenter une expérience aléatoire, on peut utiliser un arbre sur lequel apparaîtront des probabilités conditionnelles comme ci-contre :




**Exemple II.3 —** Un panier contient $45\%$ de citrons et le reste de kiwis. Parmi les citrons, $70\%$ sont bio. Parmi les kiwis, $80\%$ ne sont pas bio. On considère les événements $A$ : « Le fruit est un citron » et $B$ : « Le fruit est bio ». Construire un arbre de probabilités représentant la situation. $\rightarrow$ À rédiger

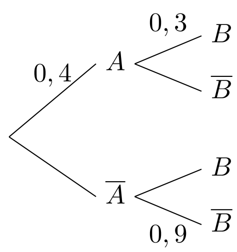
**Proposition II.3**

Dans un arbre de probabilités :

- La somme de toutes les probabilités des branches issues d'un même nœud vaut 1.
- La probabilité de l'intersection d'événements est égale au produit des probabilités rencontrées lorsqu'on parcourt le chemin de l'arbre passant par ces événements.

**Exemple II.4 —** On donne l'arbre de probabilités ci-contre.

1. Donner $P_A(B)$ et $P_{\overline{A}}(\overline{B})$.
2. Compléter entièrement l'arbre de probabilités.
3. Calculer $P(A \cap B)$ et $P(\overline{A} \cap B)$. $\rightarrow$ À rédiger



# Solutions

**Exemple I.1**

1. L'effectif total est de $32$.
2. L'effectif marginal des filles est de $18$.
3. La fréquence marginale des fille est $\frac{18}{32} = 0,5625$ soit $56,25\%$.
4. La fréquence marginale des élèves suivant la spécialité SES est $\frac{20}{32} = 0,625 = 62,5\%$.

**Exemple I.2**

1. La fréquence conditionnelle des élèves qui regardent les films en VO parmi les élèves de Première est $\frac{27}{36} = 0,75 = 75\%$.
2. La fréquence conditionnelle des élèves de Première parmi les élèves qui regardent les films en VF est $\frac{9}{84} \approx 0,104$ soit environ $10,4\%$.

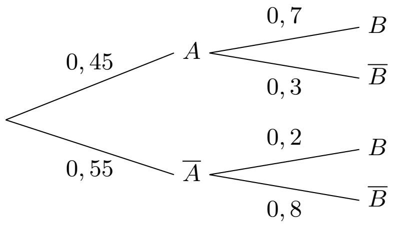
**Exemple II.1**

1. $P(A) = \frac{20}{34}$ et $P(A \cap B) = \frac{18}{34}$. On en déduit que
   $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{18}{34}}{\frac{20}{34}} = \frac{18}{34} \times \frac{34}{20} = \frac{18}{20}$
2. on aurait pu trouver directement trouver ce résultat car il y a $18$ filles qui ont obtenu le baccalauréat sur $20$ filles au total ce qui donne $P_A(B) = \frac{18}{20}$.
3. 

**Exemple II.2**

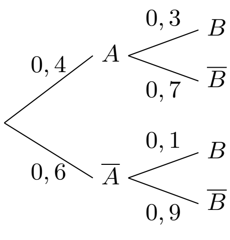
1. $P(A) = 0,7$ et $P_A(B) = 0,25$.
2. $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0,7 \times 0,25 = 0,175$
   Ainsi, la probabilité qu'un passager choisi au hasard soit à la fois français et mineur est de $17,5\%$.

**Exemple II.3**




**Exemple II.4**

1. D'après l'arbre, $P_A(B) = 0,3$ et $P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0,9$.
2. Voici l'arbre complété :




3. $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0,4 \times 0,3 = 0,12$
   $P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B) = 0,6 \times 0,1 = 0,06$

## À savoir faire dans ce chapitre

- Savoir calculer une fréquence marginale à partir d'un tableau croisé d'effectifs
- Savoir calculer une fréquence conditionnelle à partir d'un tableau croisé d'effectifs
- Savoir interpréter un tableau croisé en utilisant des fréquences conditionnelles
- Savoir calculer une probabilité conditionnelle
- Savoir calculer la probabilité d'une intersection
- Savoir construire un tableau croisé d'effectifs ou un arbre de probabilité associé à un phénomène aléatoire
- Savoir calculer des probabilités conditionnelles à l'aide d'un tableau croisé d'effectifs ou d'un arbre pondéré