CHAPITRE 3

Suites arithmétiques

I Définition d'une suite

Définition I.1

- Une suite u est une fonction définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ qui à chaque entier naturel n associe un nombre $u(n)$.
- Le nombre $u(n)$ se note aussi u_n et s'appelle le **terme de rang** n ou **terme d'indice** n de la suite u.
- La suite u se note aussi (u_n).

Remarque —

- u_0 s'appelle le premier terme de la suite (u_n)
- Une suite peut ne pas être définie pour $n = 0$ mais seulement à partir de $n = 1$. On dira alors que le premier terme de cette suite est u_1.

Exemple I.1 — Soit u la suite des nombres impairs positifs : $1, 3, 5, \ldots$.

1. Déterminer u_0, u_1 et u_2.
2. Déterminer le terme de rang 6 puis déterminer le sixième terme de cette suite. → À rédiger

Définition I.2

Soit (u_n) une suite. On dit que :

- (u_n) est définie **par récurrence** si on définit cette suite en donnant son premier terme u_0 ainsi qu'une relation entre u_{n+1} et u_n.
- (u_n) est définie de manière **explicite** si on définit cette suite à l'aide d'une formule donnant u_n en fonction de n.

Exemple I.2 — Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + 3$.

1. De quelle façon est définie cette suite ?
2. Calculer u_1, u_2 et u_5. → À rédiger

Exemple I.3 — Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 4n^2 + n + 10$.

1. De quelle façon cette suite est-elle définie ?
2. Calculer u_0, u_1, u_2 et u_5. → À rédiger

II Suites arithmétiques

1. Définition par récurrence d'une suite arithmétique

Définition II.1

On dit qu'une suite (u_n) est **arithmétique** si chaque terme s'obtient à partir du précédent en ajoutant toujours un même nombre r qu'on appelle la **raison** de la suite.
Autrement dit, (u_n) est arithmétique s'il existe un nombre r tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Remarque — Une suite (u_n) est arithmétique si, pour tout entier naturel n, la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante.

Exemple II.1 — Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $r = 10$. Donner la relation de récurrence vérifiée par la suite (u_n) puis calculer u_2. → À rédiger

Exemple II.2 — Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = 2n^2 + 3$. Montrer que cette suite n'est pas arithmétique. → À rédiger

2. Forme explicite d'une suite arithmétique

Proposition II.2

Si une suite (u_n) est arithmétique de raison r alors $\boxed{u_n = u_0 + n \times r}$.

$$\begin{tikzcd} u_0 \arrow[r, bend left, dashed, "+r"] \arrow[rrrrr, bend right, "+n \times r"'] & u_1 \arrow[r, bend left, dashed, "+r"] & u_2 \arrow[r, bend left, dashed, "+r"] & u_3 & \cdots \arrow[r, bend left, dashed, "+r"] & u_n \end{tikzcd}$$

Remarque — Si la suite (u_n) n'est définie qu'à partir de $n = 1$ alors sa forme explicite est $u_n = u_1 + (n-1) \times r$.

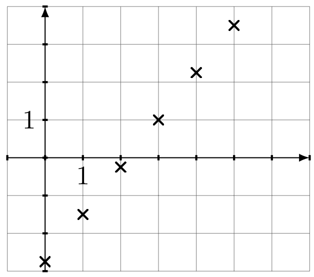
Exemple II.3 — Soit (u_n) la suite arithmétique de raison $r = 5$ et de premier terme $u_0 = 1$.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Calculer u_{10} en utilisant la relation la plus adaptée. $\longrightarrow$ À rédiger

3. Représentation graphique d'une suite arithmétique

Définition II.3

- La représentation graphique d'une suite (u_n) dans un repère du plan est le nuage de points de coordonnées (n, u_n) pour $n \in \mathbb{N}$.
- Si (u_n) une suite est arithmétique de raison r alors les points de sa représentation graphique sont alignés et ces points sont situés sur la droite représentative de la fonction affine $f(x) = rx + u_0$.



Exemple II.4 — On considère la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $r = -0,5$. Déterminer les six premiers termes de cette suite puis représenter cette suite dans un repère. $\longrightarrow$ À rédiger

4. Sens de variation d'une suite arithmétique

Définition II.4

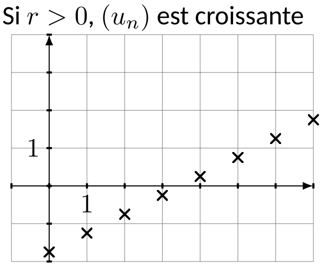
Soit (u_n) une suite. On dit que (u_n) est :

- **croissante** si ses termes sont dans l'ordre croissant, c'est-à-dire si pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
- **décroissante** si ses termes sont dans l'ordre décroissant, c'est-à-dire si pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant u_{n+1}$.
- **constante** si ses termes sont égaux c'est-à-dire si pour tout entier naturel n, $u_n = u_{n+1}$.

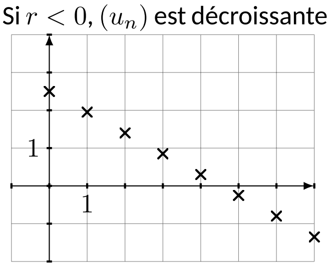
Proposition II.5

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r alors :

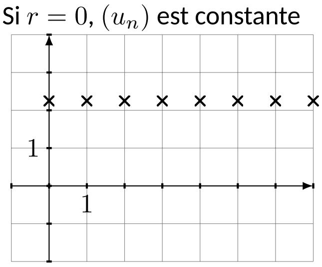
Si $r > 0$, (u_n) est croissante



Si $r < 0$, (u_n) est décroissante



Si $r = 0$, (u_n) est constante



Remarque — Ainsi, toute suite arithmétique de raison r modélise une situation discrète (variable entière) dont les données successives ont des accroissements constants égaux à r. On dit que ce sont des situations **discrètes à croissance (ou décroissance) linéaire**.

Exemple II.5 — On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $r = 0,75$.

1. Quel est le sens de variation de cette suite ? Justifier.
2. Déterminer l'expression du terme général u_n de cette suite.
3. En résolvant une inéquation, déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 13$. $\longrightarrow$ À rédiger

Solutions

Exemple I.1

1. $u_0 = 1, u_1 = 3$ et $u_2 = 5$.
2. Le terme de rang 6 est u_6 et il vaut $u_6 = 13$
   Le sixième terme est u_5 et il vaut $u_5 = 11$.

Exemple I.2

1. Cette suite est définie par récurrence.
2.

$$\begin{aligned} u_1 &= 2u_0 + 3 \\ &= 2 \times 3 + 3 \\ &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= 2u_1 + 3 \\ &= 2 \times 9 + 3 \\ &= 21 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_3 &= 2u_2 + 3 \\ &= 2 \times 21 + 3 \\ &= 44 \end{aligned}$$

Exemple I.3

1. Cette suite est définie de manière explicite.
2. $u_0 = 4 \times 0^2 + 1 + 10 = 0 + 1 + 10 = 11$
   $u_1 = 4 \times 1^2 + 1 + 10 = 4 + 1 + 10 = 15$
   $u_2 = 4 \times 2^2 + 2 + 10 = 16 + 2 + 10 = 28$
   $u_5 = 4 \times 5^2 + 2 + 10 = 100 + 2 + 10 = 112$

Exemple II.1

La relation de récurrence vérifiée par la suite (u_n) est $u_{n+1} = u_n + 10$.
$u_1 = u_0 + 10 = 4 + 10 = 14$
$u_2 = u_1 + 10 = 14 + 10 = 24$.

Exemple II.2

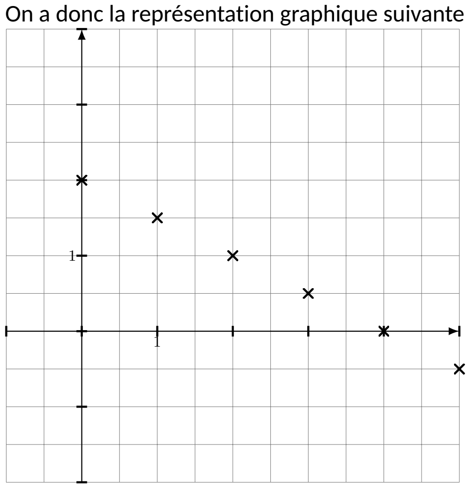
$v_0 = 2 \times 0^2 + 3 = 3$
$v_1 = 2 \times 1^2 + 3 = 5$
$v_2 = 2 \times 2^2 + 3 = 11$
Ainsi, $v_1 - v_0 = 5 - 3 = 2$ et $v_2 - v_1 = 11 - 5 = 6$. Puisque $v_1 - v_0 \neq v_2 - v_1$, la suite (v_n) n'est pas arithmétique.

Exemple II.3

1. $u_{n+1} = u_n + 5$
2. $u_n = u_0 + n \times r = 1 + n \times 5 = 1 + 5n$.
3. $u_{10} = 1 + 5 \times 10 = 1 + 50 = 51$

Exemple II.4

$u_0 = 2, u_1 = 1,5, u_2 = 1, u_3 = 0,5, u_4 = 0$ et $u_5 = -0,5$.
On a donc la représentation graphique suivante :



Exemple II.5

1. Comme $r = 0,75 > 0$, on en déduit que cette suite est croissante.
2. $u_n = u_0 + n \times r$ donc $u_n = 2 + 0,75n$
3.

$$\begin{aligned} u_n \geqslant 13 &\iff 2 + 0,75n \geqslant 13 \\ &\iff 0,75n \geqslant 11 \\ &\iff n \geqslant \underbrace{\frac{11}{0,75}}_{\approx 14,7} \\ &\iff n \geqslant 15 \end{aligned}$$

Le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 13$ est $n = 15$.

À savoir faire dans ce chapitre

- Savoir ce qu'est une suite arithmétique
- Savoir justifier qu'une suite est arithmétique
- Savoir reconnaître un phénomène discret de croissance linéaire et le modéliser avec une suite arithmétique
- Savoir justifier qu'une suite n'est pas arithmétique
- Savoir déterminer la raison d'une suite arithmétique
- Savoir calculer un terme de rang donné d'une suite arithmétique
- Savoir déterminer l'expression explicite d'une suite arithmétique
- Savoir étudier un phénomène discret de croissance linéaire avec une suite arithmétique
- Savoir représenter graphiquement une suite arithmétique
- Savoir exploiter la représentation graphique d'une suite arithmétique
- Savoir déterminer le sens de variation d'une suite arithmétique à partir de sa raison
- Savoir résoudre un problème de seuil dans le cas d'une croissance linéaire