CHAPITRE 2

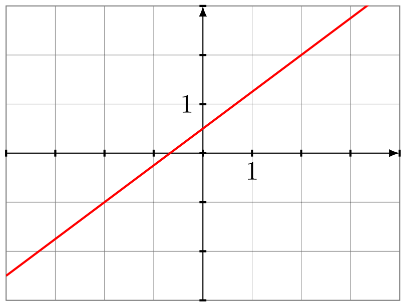
Fonctions affines

I Rappels sur les fonctions affines

1. Fonctions affines

Proposition I.1

- On dit qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est une **fonction affine** si f est de la forme $f(x) = ax + b$.
- Le nombre a s'appelle le **coefficient directeur** et le nombre b s'appelle l'**ordonnée à l'origine**.
- La représentation graphique d'une fonction affine est une droite qui a pour équation réduite $y = ax + b$.



Remarque —

- Si $b = 0$, on dit que f est **linéaire**.
- Si $a = 0$, on dit que f est **constante**.

Exemple I.1 — Tracer dans un repère la représentation graphique de la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 1$.

$\longrightarrow$ À rédiger

2. Calcul du coefficient directeur

Proposition I.2

Si f est une fonction affine et si A et B sont deux points situés sur sa représentation graphique alors

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

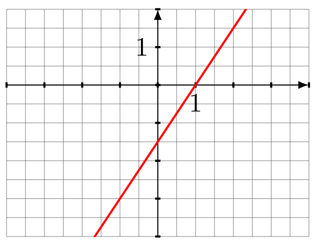
Exemple I.2 — Soit f une fonction affine telle que $f(2) = 3$ et $f(4) = -1$.

1. Calculer le coefficient directeur de cette fonction affine.
2. En déduire l'expression de $f(x)$ en fonction de x.

$\longrightarrow$ À rédiger

Exemple I.3 — On donne ci-contre la courbe représentative d'une fonction affine. Déterminer de deux façons différentes le coefficient directeur de cette fonction.

$\longrightarrow$ À rédiger



3. Sens de variation d'une fonction affine

Proposition I.3

Soit f une fonction affine telle que $f(x) = ax + b$.

- Si $a > 0$ alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a < 0$ alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a = 0$ alors f est constante sur $\mathbb{R}$.

Exemple I.4 — Soit f la fonction affine telle que $f(2) = 3$ et $f(5) = -1$. Déterminer le sens de variations de f sur $\mathbb{R}$.

$\longrightarrow$ À rédiger

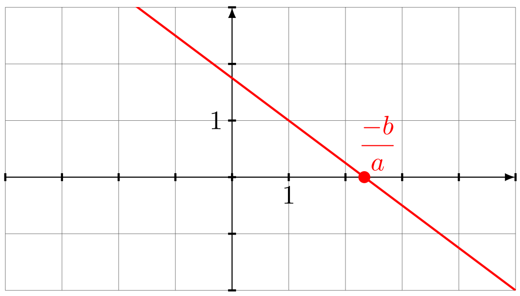
4. Signe d'une fonction affine

Proposition I.4

Soit f une fonction affine telle que $f(x) = ax + b$.

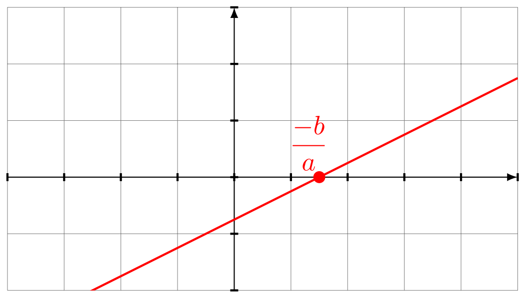
Si $a > 0$,

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$-$	0	$+$	



Si $a < 0$,

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$+$	0	$-$	



Exemple I.5 — Déterminer le tableau de signes sur $\mathbb{R}$ des fonctions affines f et g suivantes :
(a) $f(x) = 3x - 5$ (b) $g(x) = -2x + 7$ $\longrightarrow$ À rédiger

II Taux d'accroissement

1. Taux d'accroissement d'une fonction

Définition II.1

On appelle **taux d'accroissement** d'une fonction entre deux nombres x_1 et x_2 distincts le nombre

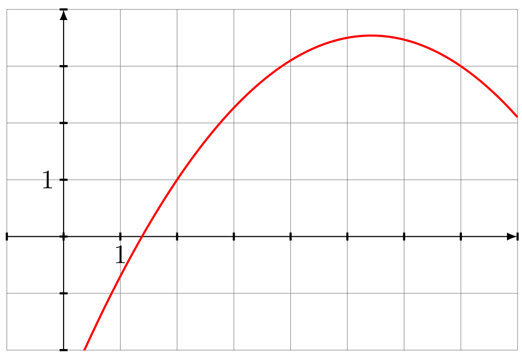
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Remarque — Le taux d'accroissement mesure à quel point une fonction varie entre deux valeurs x_1 et x_2. Il peut être positif ou négatif.

Exemple II.1 — Le graphique ci-contre donne la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer le taux d'accroissement de f entre 2 et 7.
2. Interpréter le résultat en termes de coefficient directeur.

$\longrightarrow$ À rédiger



2. Cas des fonctions affines

Proposition II.2

Si f est une fonction affine alors le taux d'accroissement de f entre deux nombres quelconques est toujours le même et il est égal au coefficient directeur de cette fonction.

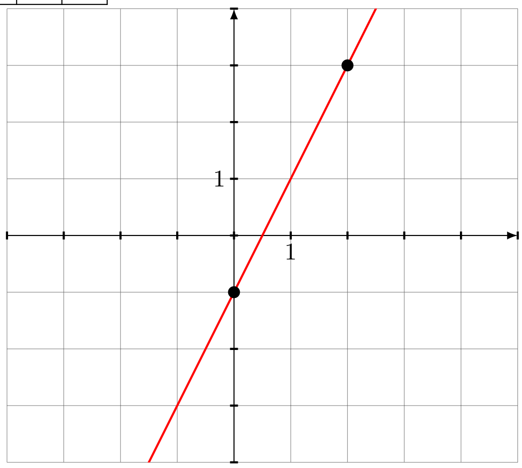
Remarque — Ainsi, les fonctions affines permettent de modéliser des phénomènes dits **continus à croissance linéaire** c'est-à-dire des phénomènes dans lesquels le taux d'accroissement est constant.

Exemple II.2 — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4x + 3$. Sans faire de calcul, déterminer le taux d'accroissement de f entre 10 et 15. $\longrightarrow$ À rédiger

Solutions

Exemple I.1
Si $x = 0$ alors $f(0) = 2 \times 0 - 1 = -1$.
Si $x = 2$ alors $f(2) = 2 \times 2 - 1 = 3$.

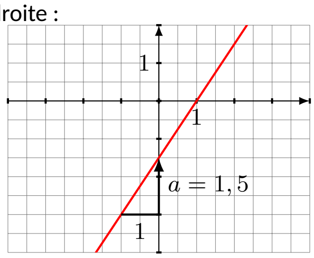
x	0	2
y	2	3



Exemple I.2

1. Les points $A(2;3)$ et $B(4;-1)$ sont situés sur la courbe de f donc le coefficient directeur de cette fonction est
$a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-1-3}{4-2} = \dfrac{-4}{2} = -2$
2. Comme f est une fonction affine, elle est de la forme $f(x) = ax + b$. D'après la question précédente, $a = -2$ donc $f(x) = -2x + b$.
Or, $f(2) = 3$
donc $-2 \times 2 + b = 3$
donc $-4 + b = 3$
donc $b = 7$
Ainsi, $f(x) = -2x + 7$.
3.

Exemple I.3
1ère méthode : on choisit deux points situés sur la courbe de f, par exemple $A(-1;-3)$ et $B(1;0)$. Ainsi,
$a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{0-(-3)}{1-(-1)} = \dfrac{3}{2} = 1,5.$
1ère méthode : on lit graphiquement le coefficient directeur en se plaçant sur un point de la droite et en se décalant d'une unité vers la droite :



Exemple I.4
Comme $f(2) = 3$ et $f(5) = -1$, le coefficient directeur de cette fonction affine est
$a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-1-3}{5-2} = \dfrac{-4}{3}$
Comme $a < 0$, on en déduit que f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exemple I.5
(a) $a = 3$ et $b = -5$ donc $\frac{-b}{a} = \frac{-(-5)}{3} = \frac{5}{3}$

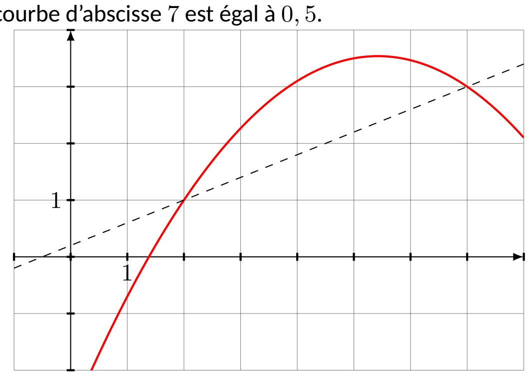
x	$-\infty$		$\frac{5}{4}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

(b) $a = -2$et $b = 7$ donc $\frac{-b}{a} = \frac{-7)}{-2} = \frac{7}{2} = 3,5$

x	$-\infty$		3,5		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Exemple II.1

1. Graphiquement, on a $f(2) = 1$ et $f(7) = 3$. Ainsi, le taux d'accroissement entre 2 et 7 est
$\dfrac{f(7)-f(2)}{7-2} = \dfrac{3-1}{7-2} = \dfrac{2}{5} = 0,4$
Interprétation : le coefficient directeur de la droite passant par le point de la courbe d'abscisse 2 et le point de la courbe d'abscisse 7 est égal à $0,5$.



Exemple II.2
Puisque f est une fonction affine, le taux d'accroissement entre deux nombre est toujours égal au coefficient directeur. En particulier, le taux d'accroissement entre 10 et 15 est égal à -4.

À savoir faire dans ce chapitre

- Savoir tracer la représentation graphique d'une fonction affine
- Savoir exploiter la représentation graphique d'une fonction affine
- Savoir calculer le coefficient directeur d'une fonction affine
- Savoir déterminer le sens de variation d'une fonction affine
- Savoir déterminer le tableau de signes d'une fonction affine
- Savoir reconnaître un phénomène continu de croissance linéaire et savoir le modéliser
- Savoir résoudre un problème de seuil dans le cas d'une croissance linéaire